

Detaljmätning med nätverks-RTK

– en noggrannhetsundersökning

Examensarbete av
Robert Odolinski & Johan Sunna

Gävle 2009

L A N T M Ä T E R I E T



Detaljmätning med nätverks-RTK

– en noggrannhetsundersökning

Detail surveying with network RTK

– an accuracy research

Examensarbete av
Robert Odolinski & Johan Sunna

Gävle 2009

L A N T M Ä T E R I E T



Förord

Detta examensarbete har utförts på uppdrag av Lantmäteriet i Gävle under hösten 2008. Examensarbetet är en avslutande del av civilingenjörsprogrammet Samhällsbyggnad med inriktning Tekniskt lantmäteri vid Kungliga Tekniska Högskolan, Stockholm.

Vi vill rikta ett stort tack till Clas-Göran Persson geodesichef vid Lantmäteriet och adjungerad professor vid KTH, som har fungerat som vår huvudsakliga handledare för detta examensarbete. Även tack till docent Milan Horemuž handledare och professor Lars E Sjöberg examinator vid KTH. Vidare vill vi tacka all personal vid geodesienheten vid Lantmäteriet samt Gävle kommun för den hjälp vi fått.

Gävle, februari 2009

Robert Odolinski

Johan Sunna

Sammanfattning

Detta examensarbete avser en noggrannhetsundersökning av detaljmätning med nätverks-RTK. Underlagsmaterialet har bestått i förslag till kontrollmetoder och teoretiska antaganden om de noggrannhetsnivåer som kan förväntas. Underlaget har utarbetats av Clas-Göran Persson vid Lantmäteriet (*Persson 2008a*). Det har också ingått i uppgiften att bedöma om metoderna är användbara även för rutinmässiga kontroller vid "vardagsmätning" samt om noggrannhetsnivåerna skulle kunna omformas till felgränser, a la HMK (Handbok till Mätningkungörelsen), för sådana metoder.

Kontrollmetoderna i fält består dels av "återbesök med nätverks-RTK", dels av "separat kontroll med konventionell teknik". De avser såväl plan- som höjdläget. Återbesök kan göras som särskild åtgärd eller integrerat med pågående produktionsmätningar. Konventionell teknik innebär kontroll med antingen totalstation eller avvägningsinstrument. Författarna anser att kontrollmetoderna är praktiskt tillämpbara; återbesök kan enkelt genomföras under pågående detaljmätningar och den separata kontrollen med konventionell teknik (totalstation) är passande i en beställarroll.

Modifieringen av de antagna noggrannhetsnivåerna har baserats på ett ganska omfattande material av mätningar, beräkningar, analyser, och överväganden. I detta arbete uppnåddes ett medelfel i plan på 10 mm och ett medelfel i höjd på 15 mm (exklusive felet i geoidmodellen SWEN05_RH2000), vilket överensstämmer med liknande studier som gjorts på senare tid (*Edwards et al. 2008*). Dock kan de förhållanden som rådde i Gävle hösten 2008 anses ha varit mycket gynnsamma.

För att uppnå plannoggrannheten krävs emellertid någon form av tvångscentrering för att minimera centreringsfelen. Höjdnoggrannheten kan komma att bli betydligt sämre under perioder av omfattande solfläcksaktivitet som återkommer regelbundet, med ett större maximum kring slutet av år 2011 (*SWPC 2009*). Detta medför att förväntad noggrannhet i höjd i detta arbete har lagts på en sämre nivå än vad som egentligen uppnåddes.

Höjdnoggrannheten kan nog förbättras genom den nya geoidmodellen SWEN08 som lanserades i januari 2009 (*Ågren 2009*). Fler faktorer som kan påverka noggrannheten för nätverks-RTK är osäkerhet i definitionen av antennens elektriska centrum, avstånd till referensstationerna, lokalisering inom eller utanför SWEPOS-nätverket, etc. De modifierade noggrannhetsnivåerna kan på sikt omformas till felgränser, men då krävs fler projekt på olika platser, utspritt i tiden och under andra förhållanden.

Abstract

This thesis is an accuracy research of detail surveying with network RTK. Another objective of the thesis concerns some proposed control methods and to estimate if they are practically useful, and if the theoretical assumptions of accuracy levels can be adjusted to standardised tolerances for such control methods.

The control methods are “revisit with network RTK” and “separate control with conventional technique”, both in plane and height. The revisit can be processed alone, or integrated with the production measurements. Conventional technique involves a totalstation or a levelling instrument. The authors consider the control methods to be practically useful.

The modification of the theoretical assumptions of accuracy levels has been based on an extensive material of measurements, calculations, analyses and considerations. This thesis achieved a standard error in plane of 10 mm and in height of 15 mm (without the standard error of the geoid model), which is comparable with similar studies carried out lately. However, the conditions in this study are considered to be very favourable. To achieve the accuracy in plane, a tripod of some type is necessary to minimize the influence from the centering standard errors.

Our modified accuracy levels can in the future be adjusted to standardised tolerances, but more studies at different locations and under other conditions are then necessary.

Innehållsförteckning

Förord	5
Sammanfattning	7
Abstract	8
1 Introduktion	11
2 Metod	12
2.1 GNSS, Nätverks-RTK och SWEPOS	12
2.1.1 GNSS	12
2.1.2 Nätverks-RTK	14
2.1.3 SWEPOS	15
2.2 Beskrivning av kontrollförfarande	16
2.2.1 Återbesök med nätverks-RTK	16
2.2.2 Kontroll med totalstation	18
2.3 Felgränser för kontroll av detaljmätning - utgångsförslag	19
2.3.1 A priori-medelfel och felgränsideer för nätverks-RTK: positioner, relativa höjder, horisontella avstånd och höjdskillnader	19
2.3.2 Felgränsideer för kontroll av absoluta höjder	23
2.3.3 Korrigering av absoluta höjder med mera - baserad på kontrollmätningen	24
2.3.4 Kontroll av (relativa) positioner i plan	25
2.3.5 Överväganden - pragmatiska felgränser	27
2.3.6 Signifikant skift	29
2.3.7 Korrelationer i tid och rum	29
2.3.8 Mätning mot "kända" punkter	30
2.3.9 Sammanställning av förslag till felgränser	31
2.4 Mätningspresentation	32
2.4.1 Mätområden	32
2.4.2 Utrustning	33
2.5 Beräkningsprocedur	34
2.5.1 Fördelningskurvor	34
2.5.2 Program för beräkningar	34
3 Resultat	36
3.1 Empiriskt test av preliminära noggrannhetsnivåer/felgränser: Område 1-3	36
3.2 Centreringsmedelfel och dess inverkan	41

3.3 Nya noggrannhetsnivåer/felgränser	43
3.3.1 Plan- och höjdkontroller	43
3.3.2 Absoluta höjder och skift	47
3.3.3 "Kända" punkter	48
3.3.4 Sammanställning av nya noggrannhetsnivåer	49
3.4 Test av nya noggrannhetsnivåer/felgränser: Område 4	50
4 Diskussion	56
4.1 Kontrollförfarande	56
4.2 Nya noggrannhetsnivåer/felgränser	56
4.3 Slutsatser	57
Referenser	58
Bilagor	61
Bilaga 1 – Approximation av F-fördelningen på 5 % risknivå med Gauss-Newtons metod	61
Bilaga 2 - Bilder på område 1-4	64

Detaljmätning med nätverks-RTK

1 Introduktion

Nätverks-RTK är idag en alltmer förekommande mätmetod av den anledningen att den är enkel att använda och ger koordinater med relativt hög noggrannhet i realtid. Kontroller av nätverks-RTK är dock inte så vanliga, trots att det finns risk för fel i mätningarna. Det är därför viktigt att återgå till det traditionella mätförfarandet, där kontroller av mätningarna var en naturlig del av arbetet.

Detta examensarbete avser en noggrannhetsundersökning av detaljmätning med nätverks-RTK. Underlagsmaterialet består av förslag till kontrollmetoder och teoretiska antaganden om de noggrannhetsnivåer som kan förväntas. Underlaget har utarbetats av Clas-Göran Persson vid Lantmäteriet (*Persson 2008a*).

Kontrollen utförs dels genom upprepad nätverks-RTK-mätning (återbesök), dels genom separat kontroll med totalstation. Arbetet syftar till att testa om de föreslagna kontrollmetoderna vid nätverks-RTK-mätning är praktiskt tillämpbara. I arbetet ingår även att utvärdera om de preliminära noggrannhetsnivåerna som tagits fram är rimliga och om de på sikt kan formas om till felgränser, a la HMK (Handbok till Mätningsskugörelsen), för sådana kontroller. Noggrannhetsnivåerna är angivna för plan och höjd.

Kapitel 2 ger först en beskrivning av GNSS, nätverks-RTK samt SWEPOS. Sedan förklaras ingående de föreslagna kontrollmetoderna samt utgångsförslagen för noggrannhetsnivåer vid kontroll av detaljmätning. Sist i kapitlet presenteras de områden som undersöktes samt beräkningsproceduren för insamlade mätdata.

I kapitel 3 presenteras resultatet från mätningar i tre olika områden, samt en analys av de centreringsmedelfel som kan uppstå vid mätning i plan med nätverks-RTK och totalstation. Vidare redovisas i kapitlet nya förslag till noggrannhetsnivåer, baserade på resultatet från de tre områdena, och slutligen verifieras dessa noggrannhetsnivåer genom mätning i ett fjärde oberoende område.

I kapitel 4 diskuteras och analyseras resultatet. Vidare föreslås fler studier under olika perioder och på olika platser för att säkerställa tillförlitligheten av dessa noggrannhetsnivåer, för att på sikt kunna omforma dem till felgränser.

2 Metod

I detta kapitel ges först en beskrivning av GNSS, nätverks-RTK och SWEPOS. Sedan förklaras ingående de föreslagna kontrollmetoderna samt utgångsförslagen för noggrannhetsnivåer vid kontroll av detaljmätning. Slutligen i kapitlet presenteras områdena som undersöktes samt beräkningsproceduren för insamlade mätdata.

2.1 GNSS, Nätverks-RTK och SWEPOS

2.1.1 GNSS

GNSS-1 (Global Navigation Satellite System) är ett samlingsnamn för de olika satellitsystem för navigering och positionsbestämning som idag finns tillgängliga. De är GPS (Global Positioning System) med 31 aktiva satelliter och GLONASS (GLObal NAVigation Satellite System) med 19 aktiva satelliter (*RSA 2009*).

Följande kan bland annat påverka noggrannheten för GNSS-mätningar:

- Jonosfären är den övre delen av atmosfären som börjar från cirka 50 km till upp emot 1000 km i höjd ovan jordens yta. Det kan bevisas att jonosfären är ett dispersivt medium som bryter signalens väg genom atmosfären. Jonosfärsfelet är beroende av frekvensen av signalen samt antalet fria elektroner i jonosfären. Antalet fria elektroner i jonosfären påverkas av solaktiviteten, latituden, tid på året, tid på dagen, etc. (*Sjöberg 2007*).
- Troposfären är den lägre delen av atmosfären (upp till cirka 15 km i höjd ovan jordens yta) och fortplantningen av de elektromagnetiska vågorna är relaterade till temperatur, lufttryck och fuktighetstryck. Troposfären består dels av en torr del (90 %) som enkelt kan korrigeras genom modeller som är baserade på lufttryck- och temperaturmätningar. Troposfären består även av en våt del (10 %), som däremot är svårare att modellera då fuktigheten är mer beroende av det lokala vädret (*Sjöberg 2007*).
- Flervägsfel är när satellitsignalen når mottagaren på fler vägar än via den direkta satellitsignalen. De signaler som inte når mottagaren direkt från satelliten kan ha reflekterats från olika material i form av byggnader, träd, vatten etc. De reflekterade signalerna är ofta svagare och försenade i jämförelse med den direkta signalen. Vid vissa tillfällen kommer både den direkta och den reflekterade signalen fram, och vid vissa tillfällen bara den reflekterade signalen. Flervägsfel kan undvikas ge-

nom att använda så kallade "choke ring-antenn", som motverkar signaler på låg elevation att nå fram till mottagaren (Lilje et al. 2007).

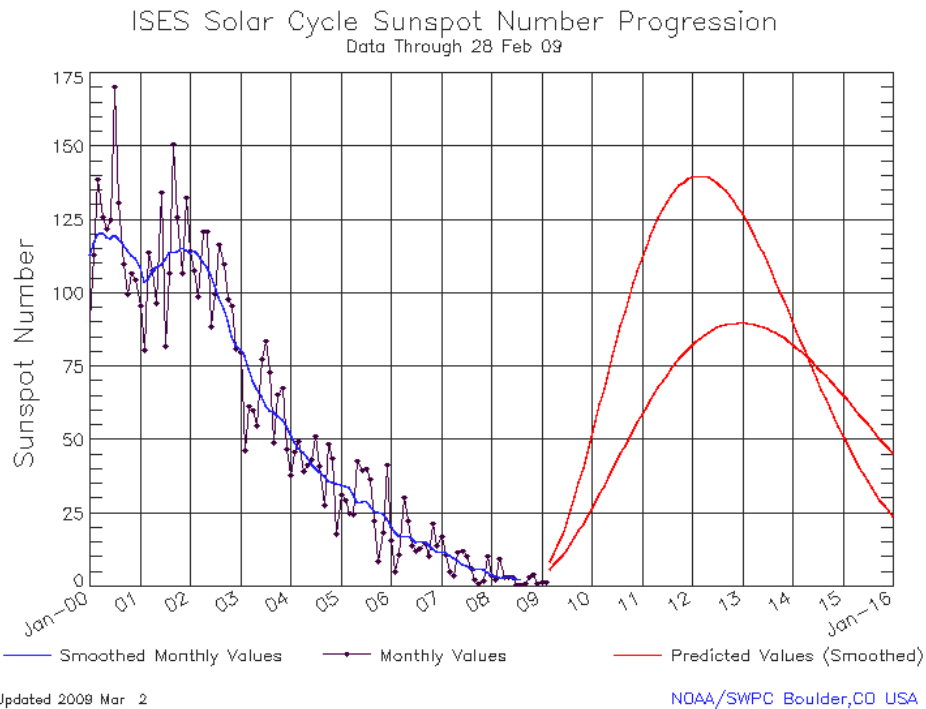
- Satellitkonfigurationen avser konfigurationen för satelliterna i förhållande till GNSS-mottagaren. Det finns olika DOP-värden (Dilution Of Precision), där PDOP (Position Dilution Of Precision) är viktig vid planeringen av precisionsmätningar och där det förekommer sikthinder. PDOP anges i 3 dimensioner och minimeras vid en bra geometrisk spridning på satelliterna (Sjöberg 2007).

Solfläcksaktivitet ökar antalet fria elektroner i jonosfären, som i sin tur stör signalerna från satellit till GNSS-mottagare. Det finns studier på när denna solaktivitet och dessa solfläckar återkommer och de studierna visar på en periodicitet om ungefär 11 år med varierande styrka i varje sådan cykel (Lidberg 1998).

Fördröjningen av signalerna är som störst i närheten av ekvatorn och klockan två på eftermiddagen lokal tid. På höga latituder är dock den totala effekten inte lika stor, men variationerna är mycket större. De största problemen för GNSS-mätning verkar orsakas av oregelbundenheter eller gradienter i jonosfären som ändras fort, och dessa oregelbundenheter inträffar vanligtvis vid solnedgång och midnatt då solaktiviteten är hög. Oregelbundenheterna ändras dock över tiden och varierar beroende på vilken del av jonosfären den passerar (Lidberg 1998).

Figur 2.1 är mätningar och uppskattningar som SWPC (Space Weather Prediction Center) har gjort och de visar på ett solfläcksaktivitetsmaximum kring slutet av år 2011 (SWPC 2009).

Detta leder till att noggrannheten för GNSS-mätningar år 2011 kan komma att försämrats.



Figur 2.1: Mätningar och uppskattningar som Space Weather Prediction Center har gjort som visar på ett solfläcksaktivitetsmaximum kring slutet av år 2011 (SWPC 2009).

2.1.2 Nätverks-RTK

RTK (Real Time Kinematic) innebär bärvågsmätning i realtid med centimeternoggrannhet, där flera felkällor elimineras eller reduceras. Tekniken bygger på att en referensmottagare etableras över en känd punkt och skickar observationsdata till den rörliga enheten som kan användas för detaljmätning. Referensmottagaren och den rörliga enheten måste ha låsning till minst fyra gemensamma satelliter under mätning. Under initialisering krävs dock vanligtvis minst fem gemensamma satelliter. Initialisering innebär att de periodobekanta (hela antalet våglängder mellan varje satellit och den rörliga GNSS-mottagaren) fixeras till rätt heltal. Den lösning som då erhålls kallas fixlösning. Kommunikation mellan enheterna sker främst genom radiolänk eller via GSM (Lilje *et al.* 2007).

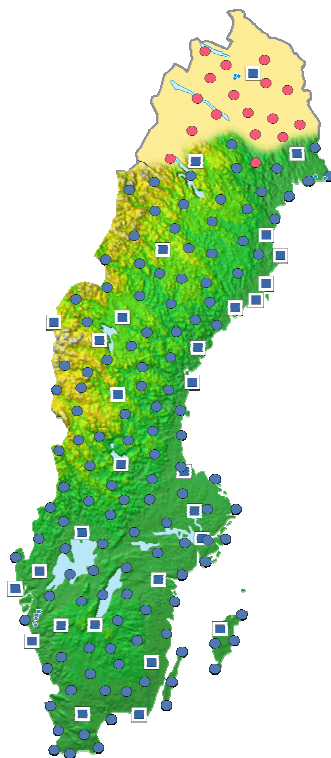
Nätverk-RTK är en vidareutveckling av RTK, och istället för att använda en referensmottagare kan användaren utnyttja fördelen i ett sammankopplat nät av referensstationer, till exempel SWEPOS. Tekniken fungerar så att flera referensstationer kopplas ihop i ett nätverk och en atmosfärsmodell interpoleras fram, vilket leder till att det går att få fram en noggrannare position på betydligt längre avstånd mellan referensstationer och mottagare, än med vanlig RTK (Lilje *et al.* 2007).

2.1.3 SWEPOS

SWEPOS består i dagsläget av 164 referensstationer av två olika klasser, A och B (Jonsson 2009). Klass A är huvudsakligen de första stationerna som sattes upp och är monterade direkt på fast berg och består huvudsakligen av betongpelare, medan klass B är av lite enklare slag och är oftast monterade på en byggnad. Nätverket är väl utbyggt och täcker i princip in hela Sverige med undantag för fjällen och vissa delar av övre Norrland. Detta område håller på att byggas ut under första halvan av 2009. Trots ett avstånd på 60-70 km mellan referensstationerna behålls en hög noggrannhet för SWEPOS-tjänsterna (Norin et al. 2008).

SWEPOS tillhandahåller data för fem olika tjänster inom GNSS. För positionering samt navigering har det sedan 1998 funnits en tjänst för att hämta hem data för efterberäkning och att via en externt tillhandahållen tjänst utföra positionering med meternoggrannhet. År 2004 introducerades dessutom en nätverks-RTK-tjänst som ger centimeternoggrannhet, som bygger på fasta referensstationer som ingår i SWEPOS. För dataöverföring används GSM/GPRS mellan mottagare och SWEPOS-centralen, och centralen är placerad på Lantmäteriet i Gävle (Norin et al. 2008).

I figur 2.2 visas placering samt planerad utbyggnad av referensstationer som ingår i SWEPOS. De blå cirklarna är referensstationer av klass B, de blå kvadraterna är referensstationer av klass A och de röda cirklarna symboliserar planerad utbyggnad (Norin et al. 2008).



Figur 2.2: Den rikstäckande infrastrukturen av referensstationer för SWEPOS (Norin et al. 2008).

2.2 Beskrivning av kontrollförfarande

Att kontrollera mätningar, instrument samt mätresultat är en självklar del i mättningsarbetet. Dessa kontroller kan göras på olika sätt och med olika krav beroende på vilken typ av noggrannhet jobbet kräver. Kontroller kan antingen utföras som en förebyggande åtgärd, med vilket menas att instrument samt enstaka data kontrolleras under mätningens gång, eller som en så kallad "konstaterande kontroll" där kontrollen utförs efter mätningen. Den "konstaterande kontrollen" kan antingen utföras på allt eller endast en del av resultatet, en så kallad delkontroll (*HMK-Ge:D 1994*).

Delkontrollen kan sedan i sin tur delas upp i tre olika metoder. Den första typen av kontroll är en stickprovskontroll, med vilket menas att ett slumpmässigt antal kontroller görs för att visa om det behövs mera omfattande kontroller. Den andra metoden är en procentuell kontroll där endast en viss procent av resultatet granskas. Denna kontroll kan ses som en stickprovskontroll, men då med fördelen att omfattningen beskrivs mer utförligt. Metoden bygger även mycket på tidigare erfarenheter samt hur stor kostnad kontrollerna får ha. Den tredje metoden, som även är den vanligaste och mest utvecklade, är den statistiska kontrollen. Metoden bygger på att fel som uppkommer i mätningen har en känd fördelning (*HMK-Ge:D 1994*).

Metoderna som nämndes ovan kan utföras av den som utfört mätningen eller av någon annan, vid olika tidpunkter och med olika typ av utrustning (*HMK-Ge:D 1994*).

I detta arbete har följande kontroller använts:

- Återbesök med nätverks-RTK, det vill säga två bestämmningar med nätverks-RTK av samma punkter, i plan och höjd.
- Kontroll med totalstation i plan och höjd, av punkter som ursprungligen mätts in med nätverks-RTK.

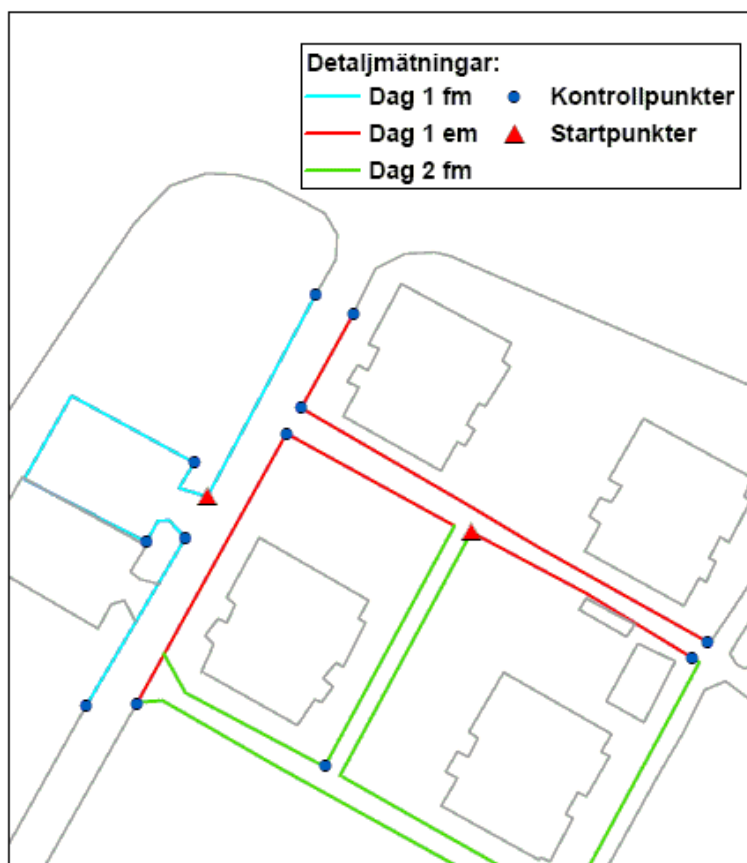
2.2.1 Återbesök med nätverks-RTK

I detta arbete initialiserades detaljmätningen genom att börja mäta på en väl markerad start-/slutpunkt, för att sedan mäta in detaljpunkter i en mätslinga som avslutades på samma punkt. För varje ny fixlösning sattes efter ett tag en kontrollpunkt ut och den markerades väl för att möjliggöra återbesök vid ett senare tillfälle. Dessutom användes protokollföring samt kartskiss flitigt för att ha möjlighet att lokalisera kontrollpunkterna.

När sedan en ny mätslinga startades för inmätning av ytterligare detaljer i närheten återbesöktes de kontrollpunkter som ändå passerades. Dessa återbesök skedde med minst 20 minuters mellanrum från ursprungsmätningen, men i många fall var tidsskillnaden flera

timmar eller dagar. Detta för att tidskorrelationens påverkan på mätmetoderna skulle minimeras.

Figur 2.3 illustrerar kontrollen återbesök med nätverks-RTK där de olika linjerna är detaljmätningar vid olika tidpunkter, de blå punkterna är kontrollpunkter som kontrolleras vid annan tidpunkt än vid första inmätningen och slutligen är de röda triangelarna startpunkter för detaljmätningarna.



Figur 2.3: Återbesök med nätverks-RTK.

När punkterna återbesökts var det enkelt att punkt för punkt jämföra avvikelser i plan (2D) och höjd (1D) mellan de två inmätningarna. "Avvikelse i plan" är det radiella avståndet mellan de två inmätningarna och "avvikelse i höjd" är höjdskillnaden mellan inmätningarna.

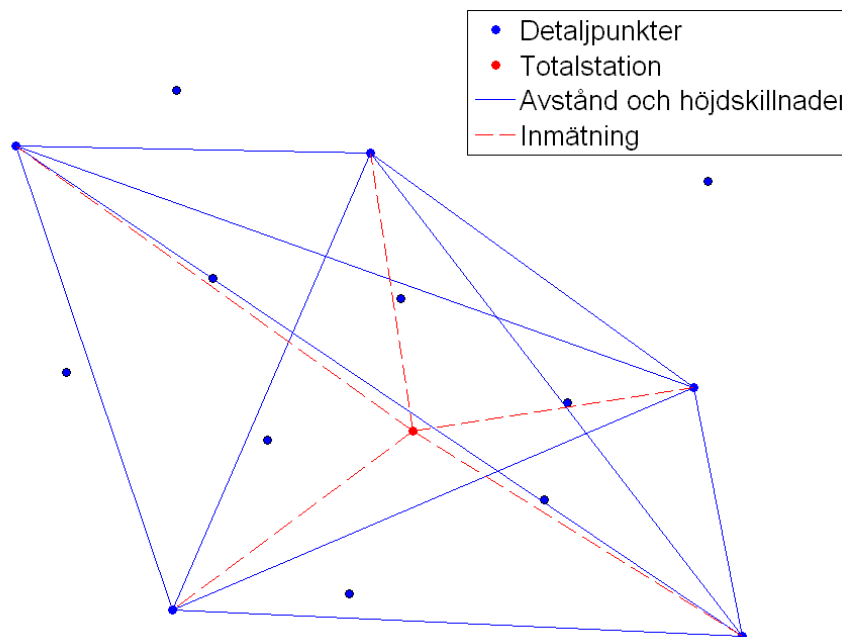
I detta arbete har GNSS-mottagaren konfigurerats utifrån rekommendationer från "Kortmanual för mätning med SWEPOS Nätverks-RTK-tjänst". Följande parametrar har använts (Norin et al. 2006):

- Elevationsgräns 15°
- 5 st medeltalsbildningar av observationer med minst en sekund mellan varje observation
- Max antennhöjd 2 m
- PDOP max 3

2.2.2 Kontroll med totalstation

För kontroll med totalstation av detaljpunkter (i plan och höjd), som ursprungligen mätts in med nätverks-RTK, utfördes en inmätning av samtliga detaljpunkter genom en fristationsetablering. Totalstationen sattes upp så att det fanns möjlighet till inmätning av så många detaljpunkter som möjligt från en uppställning. När punkterna mätts in, var det i efterhand möjligt att beräkna horisontella avstånd och höjdskillnader mellan alla dessa punkter för att kontrollera nätverks-RTK-mätningarna i jämförelse med totalstationens mätningar. Totalstationen ansågs i sammanhanget vara felfri då medelfel i plan för totalstationen enligt praktiska erfarenheter ligger i storleksordningen 5 mm (Persson 2008c).

Den röda punkten i mitten av figur 2.4 illustrerar en fristationsetablerad totalstation, de röda streckade linjerna illustrerar inmätningar och de heldragna blåa linjerna visar horisontella avstånd och höjdskillnader mellan kontrollpunkterna.



Figur 2.4: Kontroll med totalstation av detaljpunkter som ursprungligen mätts in med nätverks-RTK.

Innan en jämförelse mellan punkterna inmätta med nätverks-RTK och totalstation var genomförbar, transformerades nätverks-RTK-punkterna från SWEREF 99 TM in i ett lokalt system med en medelmeridian som går genom Gävle (se avsnitt 2.5.2).

Efter transformationen var en jämförelse mellan de horisontella avstånden och höjdskillnaderna mellan punkterna inmätta med nätverks-RTK och totalstation möjlig. Dessa kontroller kallas "avvikelse i horisontellt avstånd" samt "avvikelse i höjdskillnad". Kontrollen "enskild avvikelse relativa höjder" är avvikelse i höjd mellan

totalstationens punkter och nätverks-RTK-punkterna, där "skiftet" korrigeras från avvikelserna, mer beskrivet i avsnitt 2.3.3.

Kontrollen "avvikelse absoluta höjder" är avvikelse i höjd mellan totalstationens punkter och nätverks-RTK-punkterna utan korrigering för "skiftet".

2.3 Felgränser för kontroll av detaljmätning - utgångsförslag

Följande avsnitt 2.3.1-2.3.9 är bearbetade utifrån ett underlag i form av ett publicerat PM skrivet av Clas-Göran Persson på Lantmäteriet (*Persson 2008a*).

Denna studie avser en noggrannhetsundersökning i Gävle hösten 2008 och det är därför olämpligt att använda ordet "felgränser" som det benämns i underlaget. Det krävs fler noggrannhetsstudier på olika platser och utspritt i tiden för att omforma noggrannhetsnivåer till så kallade "felgränser". Därför är det viktigt att påpeka att det som i detta avsnitt betecknas som "felgränser" istället i kapitel 3 benämns "noggrannhetsnivåer".

2.3.1 A priori-medelfel och felgränssidéer för nätverks-RTK: positioner, relativa höjder, horisontella avstånd och höjdskillnader

Enligt resultat från olika empiriska studier vid positionsbestämning med nätverks-RTK indikeras följande medelfelsnivåer (a priori medelfel) för noggrannheten. Medelfel i plan (*Kempe 2004, Johnsson & Wallerström 2007*):

$$\sigma_{plan} \approx 15 \text{ mm} \quad (2.1)$$

Medelfelet i höjd där felet i geoidmodellen SWEN05_RH2000 (geoidhöjdens medelfel) är exkluderat bedöms vara (*Johansson 2004, Johnsson & Wallerström 2007*):

$$\sigma_{höjd} \approx 25 \text{ mm} \quad (2.2)$$

Geoidmodellens (SWEN05_RH2000) osäkerhet bedöms som (*Ågren & Svensson 2007*):

$$\sigma_{geoid} \approx 20 \text{ mm} \quad (2.3)$$

Härledning av de kommande medelfelen följer i princip nedanstående generella härledning av felfortplantningslagen för icke-linjära funktioner (kan även tillämpas på redan linjära ekvationer) (*Fan 1997*):

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \bar{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}, \quad \bar{F}(\bar{x}) = \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

där x_1, x_2, \dots, x_n är n observationer med residualer ε och där f är en godtycklig funktion av x . Anta att väntevärde för ε_i är noll och dess varians (σ_i^2) och kovarians (σ_{ij}) med ε_j följer som (Fan 1997):

$$E(\varepsilon_i) = 0$$

$$E\{[\varepsilon_i - E(\varepsilon_i)]^2\} = E(\varepsilon_i^2) = \sigma_i^2 \quad (i, j = 1, 2, 3, \dots, n)$$

$$E\{[\varepsilon_i - E(\varepsilon_i)][\varepsilon_j - E(\varepsilon_j)]\} = E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = \sigma_{ij}$$

vilket leder till kovarians-matrisen för residualerna $C_{\varepsilon\varepsilon}^{--}$ som är lika med kovarians-matrisen för observationerna C_{xx}^{--} enligt (Fan 1997):

$$E\{\varepsilon\varepsilon^{--T}\} = \begin{bmatrix} E(\varepsilon_1^2) & E(\varepsilon_1\varepsilon_2) & \cdots & E(\varepsilon_1\varepsilon_n) \\ E(\varepsilon_2\varepsilon_1) & E(\varepsilon_2^2) & \cdots & E(\varepsilon_2\varepsilon_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ E(\varepsilon_n\varepsilon_1) & E(\varepsilon_n\varepsilon_2) & \cdots & E(\varepsilon_n^2) \end{bmatrix} = C_{\varepsilon\varepsilon}^{--} = \begin{matrix} \\ \\ \\ n \cdot n \end{matrix} \quad (2.5)$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} = C_{xx}^{--} \begin{matrix} \\ \\ \\ n \cdot n \end{matrix}$$

där $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ är medelfel för n observationer.

Genom taylorutveckling linjariseras funktionen i F i en vektor, a , och med hjälp av en approximation ges till slut följande grundläggande felfortplantningslag för icke-linjära funktioner (Fan 1997):

$$\sigma_F^2 = a C_{xx}^{--} a^T,$$

$$a = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \sigma_{\bar{F}}^2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

där a är vektorn med den linjariserade funktionen i \bar{F} och $\sigma_{\bar{F}}^2$ är variansen för funktionen i \bar{F} .

Förutsatt att det inte finns någon korrelation mellan de olika observationerna x_1, x_2, \dots, x_n , det vill säga allt utom diagonalen är lika med noll, ger det ett enklare fall av felfortplantningslagen för icke-linjära ekvationer (Fan 1997):

$$\sigma_{\bar{F}}^2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \sigma_{\bar{F}}^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 \sigma_1^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2 \sigma_2^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^2 \sigma_n^2 \quad (2.7)$$

Följande ekvationer 2.8, 2.9, 2.11 och 2.12 kan härledas genom ekvation 2.7 i och med att ingen korrelation antas mellan observationerna.

När den lokala noggrannheten i höjdskillnader ska beräknas behöver ingen hänsyn tas till geoidmodellens osäkerhet på grund av att felet i geoidmodellen är ungefär lika stort i båda ändpunkterna och därför tar ut varandra. Detta innebär att medelfelet i höjdskillnaden kan beräknas som:

$$\Delta h = h_1 - h_2$$

$$\sigma_{\Delta h} = \sqrt{\left(\frac{\partial \Delta h}{\partial h_1} \right)^2 \sigma_{höjd}^2 + \left(\frac{\partial \Delta h}{\partial h_2} \right)^2 \sigma_{höjd}^2} =$$

$$\sqrt{\sigma_{höjd}^2 + \sigma_{höjd}^2} = \sqrt{2\sigma_{höjd}^2} = \sqrt{2} \sigma_{höjd} \quad (2.8)$$

där Δh är höjdskillnaden mellan höjderna h_1 och h_2 , och $\sigma_{\Delta h}$ är medelfelet för höjdskillnaden.

Analogt ger detta ett medelfel i skillnaden mellan två positionsbestämningar med nätverks-RTK:

$$\sigma_{\Delta position} = \sqrt{2}\sigma_{plan} \quad (2.9)$$

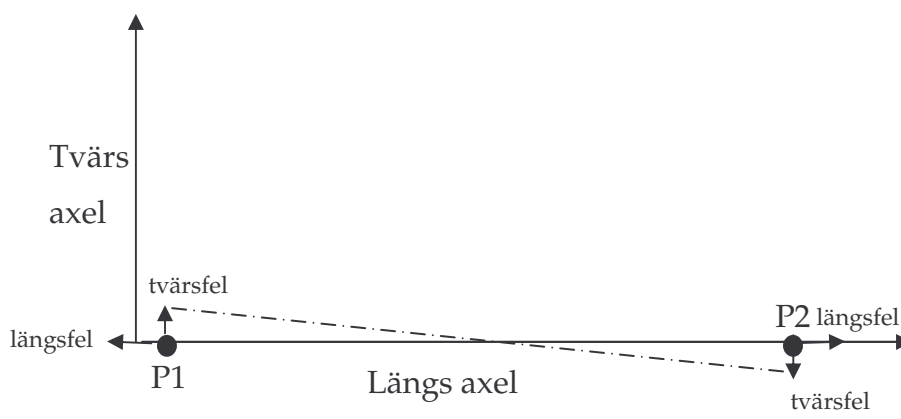
För att räkna ut felet i höjd med geoidmodellen inkluderat används följande samband:

$$h = H + N \quad (2.10)$$

Vilket säger att höjden över ellipsoiden (h) är lika med summan av höjden över geoiden (H) och geoidhöjden (N). Medelfelet i höjd blir därmed:

$$\sigma_{höjd+geoid} = \sqrt{\sigma_{höjd}^2 + \sigma_{geoid}^2} \approx 30 \text{ mm} \quad (2.11)$$

Medelfelet i horisontellt avstånd där ändpunkterna är mätta med nätverks-RTK kan, istället för att använda ekvation 2.7, härledas genom att tänka sig ett tvärs- och längdmåttsystem där ändpunkterna ligger på längsaxeln enligt figur 2.5.



Figur 2.5: Avståndet på flera tiotal meter påverkas inte alls av ett tvärsfel på några mm, endast av längsfel.

Figur 2.5 illustrerar att ett fel i tvärsmått inte påverkar avståndet på flera tiotal meter medan ett fel i längsmått påverkar det. Detta leder till att fel i tvärsmåttet kan uteslutas från felfortplantningen och att endast fel i längsmåttet tas i beaktande:

$$\sigma_{avstånd} = \sqrt{\sigma_{längs}^2 + \sigma_{längs}^2} = \sqrt{\frac{\sigma_{plan}^2}{2} + \frac{\sigma_{plan}^2}{2}} = \sigma_{plan} \quad (2.12)$$

där $\sigma_{avstånd}$ är medelfelet i horisontellt avstånd och $\sigma_{längs}$ är längsmedelfelet.

Felgränser med en täckningsgrad på 95 % kan definieras som två i täckningsfaktor, det vill säga 2σ , och en första idé till felgränser för kontrollmätning av positioner, relativa höjder, horisontella avstånd och höjdskillnader, härledda från a priori-medelfelen, redovisas i tabell 2.1.

Tabell 2.1: En första idé till felgränser för kontrollmätning av positioner, relativa höjder, horisontella avstånd och höjdskillnader härledda från a priori-medelfelen.

Två bestämningar av samma objekt i plan (nätverks-RTK även för kontrollmätningen)	$\text{Avvikelsen} \leq 2 * \sigma_{\Delta\text{position}} =$ $= 2\sqrt{2} * \sigma_{\text{plan}} \approx 40 \text{ mm}$
Två bestämningar av samma objekt i höjd (nätverks-RTK även för kontrollmätningen)	$\text{Avvikelsen} \leq 2 * \sigma_{\Delta h} = 2\sqrt{2} * \sigma_{\text{höjd}} \approx$ $\approx 70 \text{ mm}$ <p>(Kontroll av den <u>relativa</u> höjdnoggrannheten, eftersom båda mätningarna har samma geoidfel)</p>
Kontroll av horisontella avstånd (kontrollmätning med totalstation, motsvarande)	$\text{Avvikelsen} \leq 2 * \sigma_{\text{avstånd}} = 30 \text{ mm}$
Kontroll av höjdskillnader (kontrollmätning med totalstation eller avvägningsinstrument)	$\text{Avvikelsen} \leq 2 * \sigma_{\Delta h} \approx 70 \text{ mm}$

Värdena i tabell 2.1 är avrundade till jämna 5-tal och avser väl identifierbara punkter. Kontrollmätningen med totalstation eller avvägningsinstrument betraktas som felfri.

2.3.2 Felgränsidéer för kontroll av absoluta höjder

Höjder mätta med satellitteknik påverkas av fel i geoidmodellen och det finns därmed anledning att kontrollera de absoluta höjdbestämningarna med konventionell teknik, till exempel totalstation. Genom trigonometrisk höjdbestämning med anslutning till närbelägna höjdfixar kan den absoluta noggrannheten i höjd analyseras.

Det ska dock påpekas att anslutning bör ske till flera höjdfixar för att undvika att fel i mätningen eller utgångspunkterna påverkar kontrollen. Utformningen av felgränserna bör dessutom utgå från $\sigma_{\text{höjd}+\text{geoid}}$ istället för $\sigma_{\text{höjd}}$ och är härledda från a priori-medelfelen, se tabell 2.2.

Tabell 2.2: Felgränser för kontrollmätning av absoluta höjder, härledda från a priori-medelfelen.

Kontroll av absoluta höjder (kontrollmätning med totalstation eller avvägningsinstrument)	Avvikelsen $\leq 2 * \sigma_{höjd+geoid} \approx 60 \text{ mm}$
---	---

2.3.3 Korrigerig av absoluta höjder med mera - baserad på kontrollmätningen

En integrering av kontrollen "nätverks-RTK - totalstation" med en anslutning i höjd (där lokala och systematiska fel kan förekomma pga. ofullständigheter i geoidmodellen) ger en relativ och absolut höjddkontroll (höjdanslutning).

Kontrollmätning av absoluta höjder på tillräckligt många punkter ger en möjlighet att korrigera den absoluta höjdnivån, det vill säga kompensera för det fel som geoidmodellen kan ge lokalt. Detta fel kan betraktas som homogent inom ett område vilket ger en korrektion i form av ett "skift" (\pm en konstant), se avsnitt 2.3.6. Kontrollmätning med hjälp av totalstation (eller avvägning) ger en skattning av ett skift med hjälp av följande storheter.

Skillnaden mellan totalstationshöjd, $h_{kontroll}$, och RTK-bestämd höjd, h_{RTK} , för varje kontrollpunkt beräknas som:

$$h_{diff} = h_{kontroll} - h_{RTK} \quad (2.13)$$

Skiftet skattas som medeltalet för samtliga punkter (där n är antal punkter):

$$h_{skift} = \bar{h}_{diff} = \sum_1^n h_{diff} / n \quad (2.14)$$

Standardavvikelsen för kontrollen beräknas som:

$$s_{hdiff} = \sqrt{\sum_1^n (h_{diff} - \bar{h}_{diff})^2 / (n-1)} \quad (2.15)$$

Kvadratiska medelavvikelsen beräknas som:

$$RMS_{hdiff} = \sqrt{\sum_1^n h_{diff}^2 / n} \quad (2.16)$$

Ovanstående formler ger möjligheter till analys av grova fel samt test av de antagna medelfelen, och det går även genom konventionell variansanalys att härleda dessa storheter ur varandra utan att behöva beräkna dem enskilt var för sig.

Genom en approximation av en F-fördelning på 5 % risknivå med ekvation (se bilaga 1 för härledning av den med Gauss-Newtons metod):

$$f = 0,96 + \ddot{o}^{-0,4} \quad (2.17)$$

där

f = den icke-linjära funktionen för det maximala grundmedelfelet anpassad efter F-fördelning på 5 % risknivå

\ddot{o} = antal överbestämningar

kan gränsvärden för skattningarna av $\sigma_{\text{höjd}}$ och $\sigma_{\text{höjd+geoid}}$ beräknas som:

$$s_{\text{hdiff}} \leq \sigma_{\text{höjd}} (0,96 + \ddot{o}^{-0,4}) = \sigma_{\text{höjd}} (0,96 + (n-1)^{-0,4}) \quad (2.18)$$

samt

$$RMS_{\text{hdiff}} \leq \sigma_{\text{höjd+geoid}} (0,96 + \ddot{o}^{-0,4}) = \sigma_{\text{höjd+geoid}} (0,96 + n^{-0,4}) \quad (2.19)$$

Visar sig skattningarna vara större än ovanstående så avviker noggrannheten från a priori-medelfelen och det kan bero på att noggrannheten allmänt är lägre eller på att det finns grova fel i mätningarna, vilket bör kontrolleras innan skiftet skattas.

För skattningarna ovan av felgränsen för standardavvikelsen samt RMS; se tabell 2.3.

Tabell 2.3: Skattningar av felgränsen för standardavvikelsen samt RMS, härlett från strikt formel.

Test av	Felgräns-/kriterium	n=20 (mm)	n=60 (mm)	n=120 (mm)
Standardavvikelse från kontroll av absoluta eller relativa höjder	$s_{\text{hdiff}} \leq 25(0,96 + (n-1)^{-0,4})$	31,7	28,9	27,7
RMS från kontroll av absoluta höjder	$RMS_{\text{hdiff}} \leq 30(0,96 + n^{-0,4})$	37,9	34,6	33,2

2.3.4 Kontroll av (relativa) positioner i plan

Kontrollen sker med hjälp av konventionell teknik det vill säga totalstation. Uttrycket relativ kommer från att totalstationen inte ansluts i plan, dock finns det ingen systematisk skillnad mellan relativa och absoluta positioner i plan.

Unitär transformation (3-parameter, 2D Helmert-transformation utan skalförändring) används mellan RTK-positionerna och de polärt inmätta lokala positionerna från totalstationsmätningen (Fan 2007):

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} X_i^{(2)} \\ Y_i^{(2)} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} + s \cdot R(\alpha_1) \cdot \begin{bmatrix} X_i^{(1)} \\ Y_i^{(1)} \end{bmatrix}, s=1 \rightarrow \\ \rightarrow \begin{bmatrix} X_i^{(2)} \\ Y_i^{(2)} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} + R(\alpha_1) \cdot \begin{bmatrix} X_i^{(1)} \\ Y_i^{(1)} \end{bmatrix} = & \quad (1 \leq i \leq n) & \quad (2.20) \\ = \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_i^{(1)} \\ Y_i^{(1)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

där

$n =$ *antal gemensamma punkter där koordinater i två system är kända*

$X_i^{(1)}, Y_i^{(1)} =$ *koordinater för punkt i, i frånkoordinatsystemet*

$X_i^{(2)}, Y_i^{(2)} =$ *koordinater för punkt i, i tillkoordinatsystemet*

$\delta x, \delta y =$ *translationsparametrarna i x och y*

$\alpha =$ *en vridning av frånkoordinatsystemet*

Kontrollen som genomförs här är en test av transformationens grundmedelfel. För att testa positionsfelen/passfelen i enskilda punkter krävs en metod kallad "data-snooping". Totalstationsmätningen betraktas som felfri. Transformationsgrundmedelfel i plan (s_0) kan redovisas antingen "per koordinat" eller "per punkt" där grundmedelfelet är en skattning av relativ positionsnoggrannhet:

$$\sigma_{plan} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} \rightarrow s_{0,punkt} = \sqrt{s_{0,koord}^2 + s_{0,koord}^2} = \sqrt{2}s_{0,koord} \quad (2.21)$$

där $s_{0,koord}$ är grundmedelfelet "per koordinat" och $s_{0,punkt}$ grundmedelfelet "per punkt".

Genom en approximation av F-fördelning på 5 % risknivå genom ekvation 2.17 kan felgränsen bestämmas till:

$$s_{0,punkt} \leq \sigma_{plan} (0.96 + \ddot{o}^{-0.4}) \leq \sigma_{plan} (0.96 + (2n-3)^{-0.4}) \quad (2.22)$$

där

$\ddot{o} = (2n-3) =$ *antal överbestämningar = antalet passpunkter subtraherat med tre parametrar (unitär-transformation).*

För beräkningen ovan av felgränsen för grundmedelfelet "per punkt" och "per koordinat", se tabell 2.4.

Tabell 2.4: Felgränsen för grundmedelfelet "per punkt" och "per koordinat" härlett från strikt formel.

	Strikt formel	n =20 (mm)	n=60 (mm)	n=120 (mm)
Grundmedel "per punkt"	$s_{o;punkt} \leq 15(0,96 + (2n - 3)^{-0,4})$	17,9	16,6	16,1
Grundmedel "per koordinat"	$s_{o;koord} \leq 15(0,96 + (2n - 3)^{-0,4}) / \sqrt{2}$	12,7	11,8	11,4

2.3.5 Överväganden - pragmatiska felgränser

Istället för ovanstående strikta skattningar (tabell 2.3 samt tabell 2.4) redovisas i tabell 2.5 förslag till felgränser med konstanter för storheterna där antalet kontrollmätningar är $n = 20$, värdena avrundade uppåt, och felgränserna dividerade med a priori-medelfelen för att få ut en täckningsfaktor.

Tabell 2.5: Förslag till felgränser med konstanter för storheterna, antalet kontrollmätningar är $n = 20$ och värdena avrundade uppåt.

Test av	Felgräns (mm)	Antal σ
Standardavvikelse från kontroll av absoluta eller relativa höjder	$s_{hdiff} \leq 35 \text{ mm}$	$1,4 * \sigma_{höjd}$
RMS från kontroll av absoluta höjder	$RMS_{hdiff} \leq 40 \text{ mm}$	$1,3 * \sigma_{höjd+geoid}$
Grundmedelfel från unitär transformation (per koordinat)	$s_{o;koord} \leq 15 \text{ mm}$	$1,4 * \sigma_{plan} / \sqrt{2}$
Grundmedelfel från unitär transformation (per punkt)	$s_{o;punkt} \leq 20 \text{ mm}$	$1,3 * \sigma_{plan}$

"Data-snooping" på 95 %-nivån är alltför sträng vid kontroll av enskilda värden (se tabell 2.1). De slutgiltiga pragmatiska felgränsförslagen baseras därför istället på gränsvärdena för skattningarna enligt tabell 2.5 enligt:

Förutsättningar :

$$\text{Max}(s_{0,\text{punkt}}) = 20 \text{ mm felgräns}$$

$$\text{Max}(s_{\text{hdiff}}) = 35 \text{ mm felgräns}$$

- Återbesök nätverks-RTK, avvikelse i plan:

$$\sigma_{\Delta\text{position}} = \sqrt{2}\sigma_{\text{plan}} \rightarrow$$

$$\rightarrow 2\sigma_{\Delta\text{position}} = 2\sqrt{2}\text{Max}(s_{0,\text{punkt}}) \approx 55 \text{ mm felgräns}$$

$$55 / \sigma_{\Delta\text{position}} = 55 / (\sqrt{2}\sigma_{\text{plan}}) = 55 / (\sqrt{2} \cdot 15) \approx 2,6 \rightarrow$$

$$\rightarrow 55 \text{ mm (felgräns)} = 2,6\sigma_{\Delta\text{position}}$$

- Återbesök nätverks-RTK, avvikelse i höjd:

$$\sigma_{\Delta h} = \sqrt{2}\sigma_{\text{höjd}} \rightarrow$$

$$2\sigma_{\Delta h} = 2\sqrt{2}\text{Max}(s_{\text{hdiff}}) \approx 100 \text{ mm felgräns}$$

$$100 / \sigma_{\Delta h} = 100 / (\sqrt{2}\sigma_{\text{höjd}}) = 100 / (\sqrt{2} \cdot 25) \approx 2,8 \rightarrow$$

$$\rightarrow 100 \text{ mm (felgräns)} = 2,8\sigma_{\Delta h}$$

- Nätverks-RTK- totalstation, avvikelse i horisontellt avstånd:

$$\sigma_{\text{avstånd}} = \sigma_{\text{plan}} \rightarrow$$

$$2\sigma_{\text{avstånd}} = 2\text{Max}(s_{0,\text{punkt}}) \approx 40 \text{ mm felgräns}$$

$$40 / \sigma_{\text{avstånd}} = 40 / \sigma_{\text{plan}} = 40 / 15 \approx 2,7 \rightarrow$$

$$\rightarrow 40 \text{ mm (felgräns)} = 2,7\sigma_{\text{avstånd}}$$

- Nätverks-RTK - totalstation, avvikelse i höjdskillnad:

$$\sigma_{\Delta h} = \sqrt{2}\sigma_{\text{höjd}} \rightarrow$$

$$2\sigma_{\Delta h} = 2\sqrt{2}\text{Max}(s_{\text{hdiff}}) \approx 100 \text{ mm felgräns}$$

$$100 / \sigma_{\Delta h} = 100 / (\sqrt{2}\sigma_{\text{höjd}}) = 100 / (\sqrt{2} \cdot 25) \approx 2,8 \rightarrow$$

$$\rightarrow 100 \text{ mm (felgräns)} = 2,8\sigma_{\Delta h}$$

- Nätverks-RTK - totalstation, enskild avvikelse relativa höjder:

$$\sigma_{\text{höjd}} \rightarrow$$

$$2\sigma_{\text{höjd}} = 2\text{Max}(s_{\text{hdiff}}) \approx 70 \text{ mm felgräns}$$

$$70 / \sigma_{\text{höjd}} = 70 / 25 \approx 2,8 \rightarrow$$

$$\rightarrow 70 \text{ mm (felgräns)} = 2,8\sigma_{\text{höjd}}$$

- Nätverks-RTK - totalstation, enskild avvikelse absoluta höjder:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{höjd+geoid}} &\rightarrow \\ 2\sigma_{\text{höjd+geoid}} &= 2\text{Max}(\text{RMS}_{\text{hdiff}}) \approx 80 \text{ mm felgräns} \\ 80 / \sigma_{\text{höjd+geoid}} &= 80 / 30 \approx 2,7 \rightarrow \\ &\rightarrow 80 \text{ mm (felgräns)} = 2,7\sigma_{\text{höjd+geoid}} \end{aligned}$$

2.3.6 Signifikant skift

Ett signifikant skift bedöms vara av storleksordningen 10-20 mm (Persson 2008a). $\text{RMS}_{\text{hdiff}}$ ger en indikation för om det finns ett signifikant skift (tabell 2.5). s_{hdiff} i höjdkontrollen innebär att skiftet har korrigerats bort (tabell 2.5).

Det signifikanta skiftet korrigeras bort från höjdavvikelserna för kontrollen "nätverks-RTK - totalstation, enskild avvikelse relativa höjder" för att möjliggöra analys av den relativa höjdnoggrannheten för mätningen.

2.3.7 Korrelationer i tid och rum

I framställningen hittills har alla positionsbestämningar betraktats som okorrelerade, men i verkligheten finns en korrelation i tid och rum mellan RTK-mätningarna. Tidsmässig korrelation innebär att mätningar nära i tiden är korrelerade och rumslig korrelation är en korrelation som är kopplad till platsen, exempelvis ett hinder eller en störning som gör att mätningar på den platsen får likartade fel.

Felgränser som föreslagits beträffande skillnaderna mellan två RTK-mätningar kan modifieras av korrelationer på följande sätt (genom att använda ekvation 2.6 med korrelation):

Förutsättningar :

$$\Delta h = h_{\text{RTK1}} - h_{\text{RTK2}}$$

$$\sigma_{\Delta h} = \sqrt{2}\sigma_{\text{höjd}} \text{ och}$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} \rightarrow \rho = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1\sigma_2} \rightarrow$$

$$\sigma_{\Delta hNY}^2 = aC_{xx}^{-1}a^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta h}{\partial h_{\text{RTK1}}} & \frac{\partial \Delta h}{\partial h_{\text{RTK2}}} \end{bmatrix} \sigma_{\text{höjd}}^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta h}{\partial h_{\text{RTK1}}} \\ \frac{\partial \Delta h}{\partial h_{\text{RTK2}}} \end{bmatrix} =$$

$$= [1 \quad -1] \sigma_{\text{höjd}}^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \sigma_{\text{höjd}}^2 [1-\rho \quad \rho-1] \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \sigma_{\text{höjd}}^2 (2-2\rho) = \frac{\sigma_{\Delta h}^2}{2} (2-2\rho) \rightarrow$$

$$\rightarrow \sigma_{\Delta hNY} = \sigma_{\Delta h} \sqrt{1-\rho}$$

där

Δh = höjdskillnad mellan RTK-höjderna h_{RTK1} och h_{RTK2} .

ρ = korrelationskoefficient

$\sigma_{\Delta h}$ = gammalt medelfel i höjdskillnad

$\sigma_{\Delta hNy}$ = nytt medelfel i höjdskillnad

Vilket ger en allmän ekvation för "skalning" av den nya felgränsen:

$$felgräns_{ny} = felgräns_{gammal} \sqrt{1-\rho} \quad (2.23)$$

En empirisk analys kan göras genom att till exempel sprida ut mätningarna över tiden för att eliminera den tidsmässiga korrelationen. Alternativet är att mäta i korta intervall nära inpå varandra och bestämma tidskorrelationen för att sedan "skala om" felgränsen.

Ytterligare en effekt av korrelationer kan vara att mätfelelen blir lika stora och de skattade medelfelen (standardavvikelserna) blir då onormalt små, det vill säga spridningen blir liten mellan felelen. Vidare kan ett "pseudo-skift" också uppstå, vilket innebär ett skenbart skift i höjd som beror på att avvikelserna är lika stora enbart beroende av korrelationer och inte på någon egentlig skillnad mellan höjdsystemen.

2.3.8 Mätning mot "kända" punkter

Markerade punkter i plan bör normalt inte betraktas som kända då det finns en aktiv realisering och de bör inte vara bärare av referenssystemet. Kontroll av en stompunkt i plan med nätverks-RTK bör därför istället ses som att det ger en allmän uppfattning om skillnader mellan de olika realiseringarna av systemet. I höjd är det dock de markerade stompunkterna som är bärare av höjdsystemet och dessa punkter mäts därmed in som kända punkter (höjdfixar).

I riksnätet i plan finns det emellertid punkter som kan betraktas som felfria och för en kontroll av dessa med nätverks-RTK erhålls en felgräns med två i täckningsfaktor (95 % täckningsgrad) enligt:

$$\Delta = 2\sigma_{\Delta position} / \sqrt{2} = 2\sigma_{plan} \approx 2Max(s_{0,punkt}) = 40 \text{ mm} \quad (2.24)$$

Vid ett eventuellt fel i den "kända" punkten, $\sigma^{\text{känd}}_{\text{punkt}}$, skalas felgränsen upp genom att använda Δ dividerat med σ_{plan} och felfortplantningsformeln (ekvation 2.7):

$$\Delta'' = \frac{\Delta}{\sigma_{plan}} \sqrt{\sigma_{plan}^2 + \sigma_{\text{\"k\"and}'' punkt}^2} = 40 \sqrt{15^2 + \sigma_{\text{\"k\"and}'' punkt}^2} / 15 =$$

$$= 40 \sqrt{1 + (\sigma_{\text{\"k\"and}'' punkt} / 15)^2} \quad (2.25)$$

Förslag till felgränser för inmätning av "känd" punkt vid olika antaganden om punktmedelfelet för den inmätta punkten beräknades genom ovanstående ekvation och redovisas i tabell 2.6.

Tabell 2.6 Förslag till felgränser för nätverks-RTK-mätning av sedan tidigare koordinatbestämda punkter med olika antaganden om deras noggrannhet.

$\sigma_{\text{\"k\"and}'' punkt}$	0 mm	5 mm	10 mm	15 mm
Δ''	40 mm	42 mm	47 mm	55 mm

Noterbart från tabell 2.6 är att ett punktmedelfel på över 15 mm gör att en punkt inte längre kan betraktas som "känd".

2.3.9 Sammanställning av förslag till felgränser

En sammanställning av de i avsnitt 2.3.1-2.3.8 nämnda preliminära förslagen till felgränser presenteras nedan:

- **Återbesök nätverks-RTK - i samband med ursprungsmätningen eller som särskild kontrollåtgärd:**
 - avvikelse i plan ≤ 55 mm
 - avvikelse i höjd ≤ 100 mm
- **Nätverks-RTK-mätning av tidigare koordinatbestämd punkt:**
 - avvikelse i plan ≤ 40 -55 mm
- **Kontroll med totalstation av punkt ursprungligen inmätt med nätverks-RTK:**
 - unitär transformation: grundmedelfel per koordinat $S_{0;koord} \leq 15$ mm
 - (grundmedelfel per punkt $S_{0;punkt} \leq 20$ mm)
 - avvikelse i horisontellt avstånd ≤ 40 mm
 - translation i höjd: standardavvikelse $S_{hdiff} \leq 35$ mm
 - avvikelse i höjdskillnad ≤ 100 mm
 - enskild avvikelse relativa höjder ≤ 70 mm
 - absoluta höjder: kvadratisk medelavvikelse $RMS_{hdiff} \leq 40$ mm
 - enskild avvikelse absoluta höjder ≤ 80 mm
 - signifikant skift ≥ 10 -20 mm.

2.4 Mätningspresentation

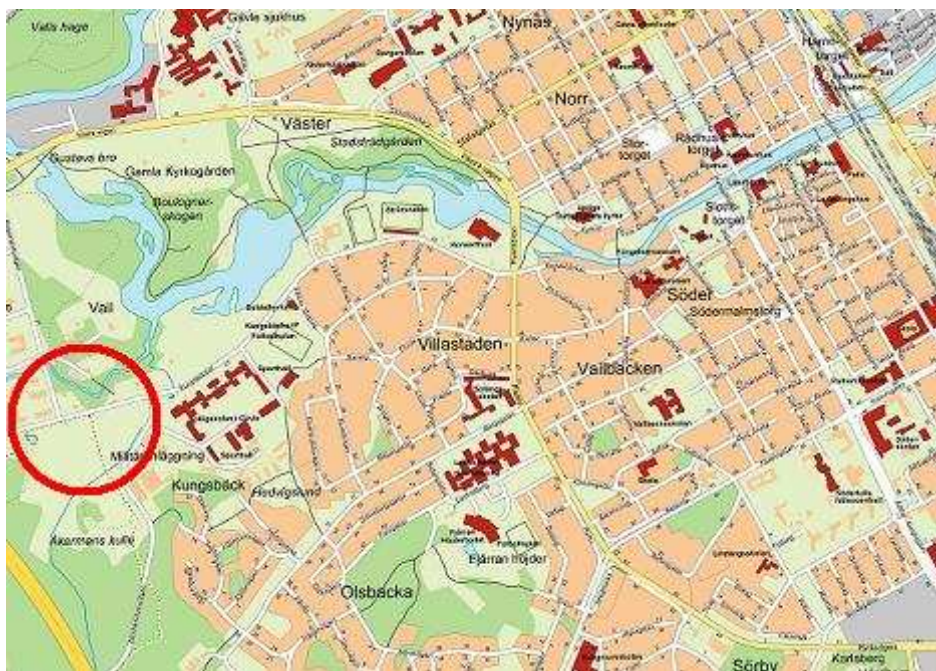
Följande avsnitt beskriver först vilka mätområden som kontrollerna testades på och sedan vilken utrustning som användes.

2.4.1 Mätområden

För att testa de olika metoderna vid kontroll av mätningar utförda med nätverks-RTK i plan och höjd valdes i ett första skede tre olika områden.

De hade alla olika karaktär, allt mellan sikthinder i form av hus och träd, till att vara helt öppna fält och detta för att erhålla ett resultat med varierande storlek på flervägsfel med mera. Hänsyn togs även till tidskorrelationen mellan återbesöken genom att mäta vid olika tidpunkter; förmiddag, eftermiddag samt i en del fall med flera dagars intervall. För att ytterligare minska korrelationer som kan uppkomma ominitialiserades fixlösningen för varje kontrollpunkt.

Det första området som valdes låg vid Teknikparken i Gävle markerat med röd ring i figur 2.6.



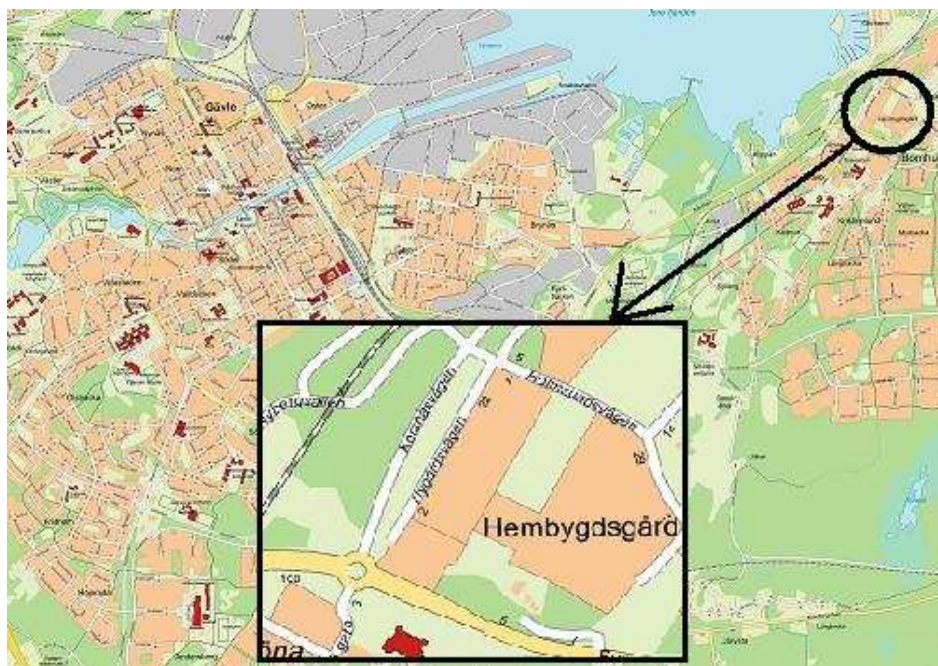
Figur 2.6: Första mätområdet som valdes var Teknikparken i Gävle markerad med röd ring (© Lantmäteriet Gävle 2009. Medgivande I 2008/1948, samt editerad).

Området hade varierande terräng, det vill säga en blandning av besvärliga partier med sikthinder från bland annat hus och träd samt inslag av princip öppna ytor med få sikthinder. Bilder på området kan ses i bilaga 2.

Område 2 ligger vid en parkering nedanför Teknikparken på ungefär samma plats som område 1 (se figur 2.6) och valdes ut på grund av

dess speciella karaktär i form av en mycket stor yta med nästintill inga sikthinder alls (bilder i bilaga 2).

Det tredje området var ett bostadsområde vid Bomhus öster om Gävle, se figur 2.7.



Figur 2.7: Tredje mätområdet var ett bostadsområde vid Bomhus öster om Gävle
(© Lantmäteriet Gävle 2009. Medgivande I 2008/1948, samt editerad).

Kravet vid val av detta område var att det skulle förekomma svåra förhållandena i form av sikthinder av höga bostadshus, träd med mera (bilder i bilaga 2).

Dessa tre områden har lagt grunden till en modifiering av de preliminära noggrannhetsnivåerna/felgränserna för de olika kontrollmetoderna, se resultat i kapitel 3.

2.4.2 Utrustning

Vid testen av de olika kontrollmetoderna användes Topcon HiPer+, en GNSS-mottagare med integrerad GNSS-antenn, samt fältdatorn FC100. GNSS-mottagaren monterades på en mätstång och centreredes med ett kontrollerat dosvattenpass. Nedan redovisas specifikationer för GPS-mottagaren:

- GNSS-mottagare – kombinerad GPS/GLONASS
- GNSS-antenn, typ – centrerad RTK UHF-antenn

För de olika kontrollerna med totalstation användes utrustning från Trimble, 5601 DR 200+ med följande noggrannhetspecifikation (*Trimble 5600 DR specifikation*):

- medelfel i vinkelmätning 0,1 mgon
- medelfel i längdmätning $\pm(3 \text{ mm} + 3 \text{ ppm})$

2.5 Beräkningsprocedur

När alla avvikelser beräknats för de olika kontrollerna (se avsnitt 2.2) användes en så kallad statistisk kontroll som bygger på att felet som uppkommer har en känd fördelning (*HMK-Ge:D 1994*). Dessa fördelningar beskrivs i avsnitt 2.5.1 nedan. Avsnitt 2.5.2 beskriver vilka program som användes för alla beräkningar.

2.5.1 Fördelningskurvor

Avvikelsena för kontrollerna i detta arbete har en känd fördelning i antingen 1D eller 2D. Avvikelsena i 1D antas vara normalfördelade.

Kontroller i 1D är alla avvikelser för höjdskillnader, höjder samt horisontella avstånd. Den teoretiska fördelningskurvan i 1D är en "dubbelvikt" normalfördelningskurva, vilket innebär att avvikelserna antas vara fördelade enligt (*Persson 2008b*):

$$f(x) = 2 \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \quad 0 < x < \infty \quad (2.26)$$

där tvåan i ekvationen ger en "dubbelvikt" normalfördelning, x är avvikelser, μ är väntevärde och σ standardavvikelse.

Kontrollen i 2D är avvikelse i plan, det vill säga radiell avvikelse. Den teoretiska fördelningskurvan i 2D är en Weibull fördelningskurva, vilket innebär att avvikelserna antas vara fördelade enligt (*Persson 2008b*):

$$f(x; \lambda, k) = \frac{k}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda} \right)^{k-1} e^{-(x/\lambda)^k}, \quad x > 0 \quad (2.27)$$

där

k = formparameter för fördelningen (2D $\rightarrow k = 2$)

λ = skalparameter för fördelningen ($\lambda = 1$ är skalparameter 1)

2.5.2 Program för beräkningar

För koordinattransformationer och inpassning för de olika kontrollerna har programmet GTRANS (version 3.62) använts. GTRANS är ett program utvecklat av Lantmäteriet och hanterar bland annat koordinattransformationer och inpassningar av olika slag. Koordinater för detaljpunkter inmätta med nätverks-RTK transformerades för att

möjliggöra en senare inpassning mot de av totalstationen inmätta detaljpunkterna. Koordinaterna transformerades på följande sätt:

- SWEREF 99 TM RH2000 → SWEREF 99 lat long RH 2000
- SWEREF 99 lat long RH 2000 → SWEREF 99 lokal projektion RH 2000

där den lokala projektionen har en medelmeridian som går genom Gävle, $17^{\circ} 11' 45,6''$. Inpassningen gjordes sedan med den inbyggda funktionen i GTRANS (unitär transformation, se ekvation 2.20). Avvikelserna för de olika kontrollmetoderna beräknades därefter med hjälp av Microsoft Office Excel 2003.

Histogrammen skapades med Matlab (version 7.1, R14), som är ett program för numeriska beräkningar. För att rita upp histogrammen skrevs ett program som anropade ett antal inbyggda funktioner i Matlab, bland annat:

- hist: för att returnera frekvens och mitten av "facken" för avvikelserna, för ett godtyckligt antal fack. Facken är staplarna i histogrammet dit avvikelserna tillhör.
- bar: för att rita staplarna för histogrammen med avseende på de beräknade mittenpunkterna för facken och frekvensen.
- plot: för att rita de teoretiska fördelningskurvorna, med mera.

3 Resultat

Nedan presenteras först resultat för område 1-3 samt en analys av centreringsmedelfelet, därefter redovisas de modifierade noggrannhetsnivåerna/felgränserna. De nya noggrannhetsnivåerna verifierades sedan med hjälp av ytterligare ett mätningssområde av samma karaktär som område 3 (se bilder bilaga 2). Resultatet för det nya området med de nya noggrannhetsnivåerna tillämpade avgjorde om dessa nivåer var realistiska eller inte.

3.1 Empiriskt test av preliminära noggrannhetsnivåer/felgränser: Område 1-3

I tabell 3.1 redovisas antal kontrollerade detaljpunkter samt antalet höjdfixar som använts för anslutning av totalstationen i höjd för varje område. De kontrollerade detaljpunkterna har kontrollerats både med återbesök med nätverks-RTK och genom inmätning med totalstation. Antalet kontrollerade detaljpunkter som redovisas i tabell 3.1 är endast detaljpunkter som återbesökts (start/slut-punkt, anslutning mellan olika uppställningar, detaljpunkter inom mätslingorna). Utöver dessa kontroller har ett stort antal andra detaljpunkter blivit inmätta för att så bra som möjligt efterlikna en verklig mätsituation.

Tabell 3.1: En sammanställning över antal inmätta detaljpunkter för kontroll samt antal använda höjdfixar.

Område	Antal kontrollerade detaljpunkter	Antal höjdfixar
Område 1	11	1
Område 2	32	1
Område 3	27	1
Totalt	70	3

Notera att trots att det ser ut att vara få kontrollerade detaljpunkter så blir kontrollerna desto fler. Tabell 3.2 visar antalet avvikelser i plan, höjd, horisontella avstånd, höjdskillnader, enskilda avvikelser relativa höjder och avvikelser absoluta höjder beräknat från inmätta punkter enligt avsnitt 2.2.

Tabell 3.2: Antal kontroller: avvikelser i plan, höjd, horisontella avstånd, höjdskillnader, enskilda avvikelser relativa höjder och avvikelser absoluta höjder.

	Område 1	Område 2	Område 3	Totalt
Återbesök nätverks-RTK, avvikelser plan	15	40	31	86
Återbesök nätverks-RTK, avvikelser höjd	15	40	31	86
Nätverks-RTK - totalstation, avvikelser horisontellt avstånd	27	191	169	387
Nätverks-RTK - totalstation, avvikelser höjdskillnader	27	191	169	387
Nätverks-RTK - totalstation, enskilda avvikelser relativa höjder	11	32	27	70
Nätverks-RTK - totalstation, avvikelser absoluta höjder	11	32	27	70

Enligt avsnitt 2.3.5 var utgångspunkten för uppskattningen av noggrannhetsnivåerna 20 kontrollmätningar och tabellerna ovan visar att alla kontroller överstigit detta i två av tre områden.

En sammanslagning av område 1-3 för RMS beräknades genom en poolad varians (Vännman 2002):

$$\sigma_{pol}^2 = \frac{\ddot{o}_1\sigma_1^2 + \ddot{o}_2\sigma_2^2 + \dots + \ddot{o}_n\sigma_n^2}{\ddot{o}_1 + \ddot{o}_2 + \dots + \ddot{o}_n} \quad (3.1)$$

där σ_{pol}^2 är poolad varians för $\sigma_1^2, \sigma_2^2 \dots \sigma_n^2$, n varianser, och $\ddot{o}_1, \ddot{o}_2 \dots \ddot{o}_n$ är n antal överbestämningar för varje motsvarande varians.

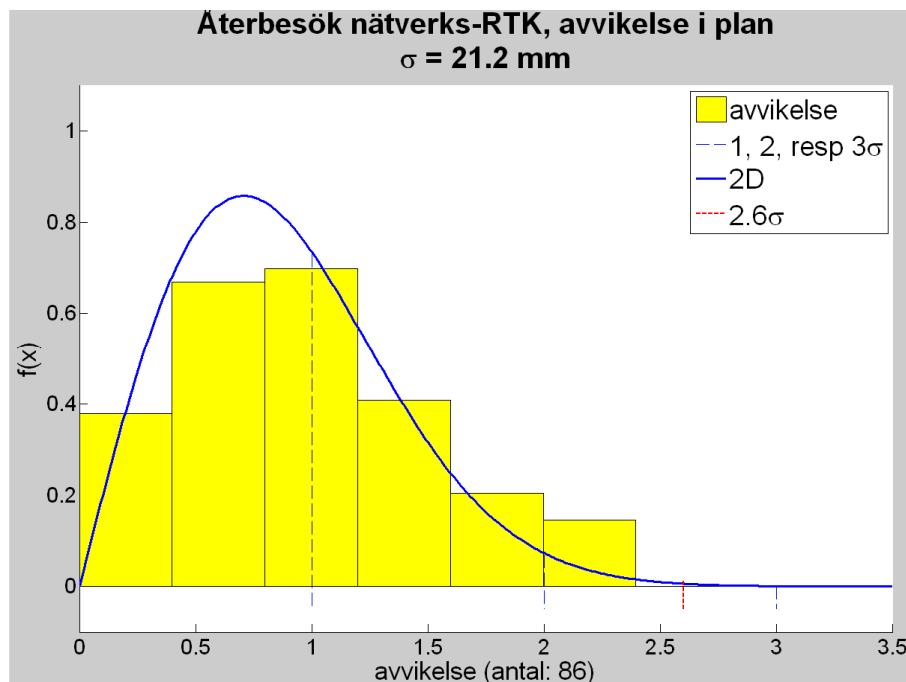
En sammanställning över beräknade RMS för de olika kontrollmetoderna visas i tabell 3.3 för område 1-3 (poolat RMS), tillsammans med a priori medelfelen från de preliminära noggrannhetsnivåerna (avsnitt 2.3.1).

En tydlig tendens är att de a priori medelfelen för kontrollmetoderna i höjd är alldeles för höga medan de a priori medelfelen i plan ligger några mm under RMS.

Tabell 3.3: A priori medelfel samt poolade RMS för område 1-3 och kontrollmetoderna.

Test av	Medelfel, σ (mm)	RMS (mm)
Återbesök nätverks-RTK, avvikelse i plan	21,2	23,7
Återbesök nätverks-RTK, avvikelse i höjd	35,4	20,3
Nätverks-RTK - totalstation, avvikelse i horisontellt avstånd	15,0	19,8
Nätverks-RTK - totalstation, avvikelse i höjdskillnad	35,4	14,5
Nätverks-RTK - totalstation, enskild avvikelse relativa höjder	25,0	10,8

För en djupare analys av resultatet går det att titta på histogrammen för de olika kontrollmetoderna och alla avvikelser. Figur 3.1 visar "återbesök nätverks-RTK, avvikelse i plan" med noggrannhetsnivå 55 mm och 2,6 i täckningsfaktor. De gula staplarna representerar avvikelser i plan, den blåa fördelningskurvan är en Weibull fördelningskurva i 2D (beskrivet i avsnitt 2.5.1).

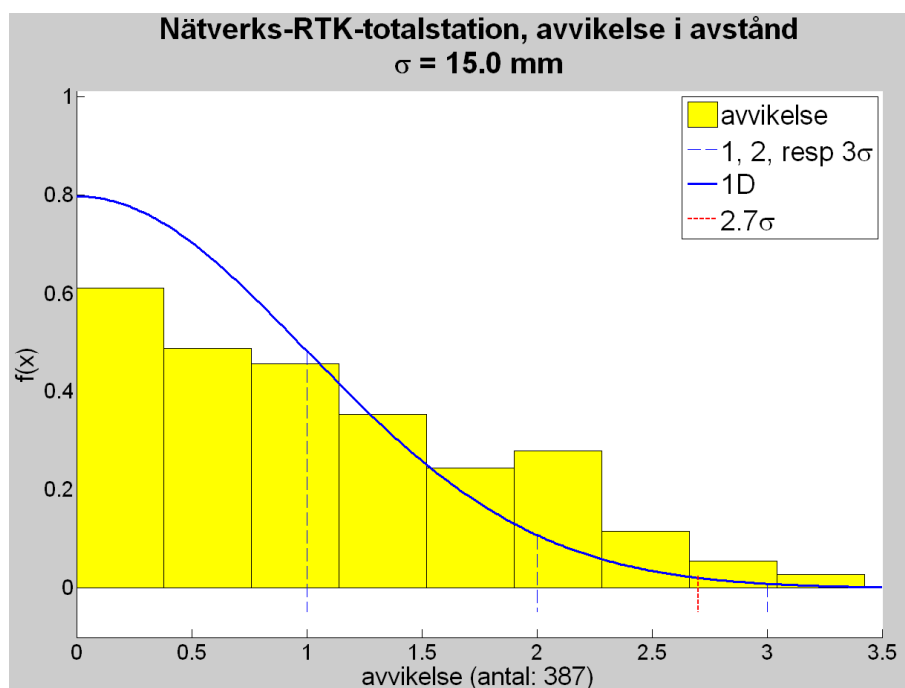


Figur 3.1: Histogram för kontrollmetoden "återbesök nätverks-RTK, avvikelse i plan" med noggrannhetsnivå 55 mm och täckningsfaktor 2,6.

Figur 3.1 visar en viss tendens till avplattning, om än inte så stor, och denna avplattning kan bero på ett centreringsmedelfel för nätverks-RTK-stängen. Dock klarade avvikelserna noggrannhetsnivån.

Figur 3.2 visar "nätverks-RTK - totalstation, avvikelse i horisontellt avstånd" med noggrannhetsnivå 40 mm och 2,7 i täckningsfaktor. De

gula staplarna representerar avvikelser i horisontellt avstånd, den blåa fördelningskurvan är en "dubbelvikt" normalfördelningskurva (1D) (beskrivet i avsnitt 2.5.1).

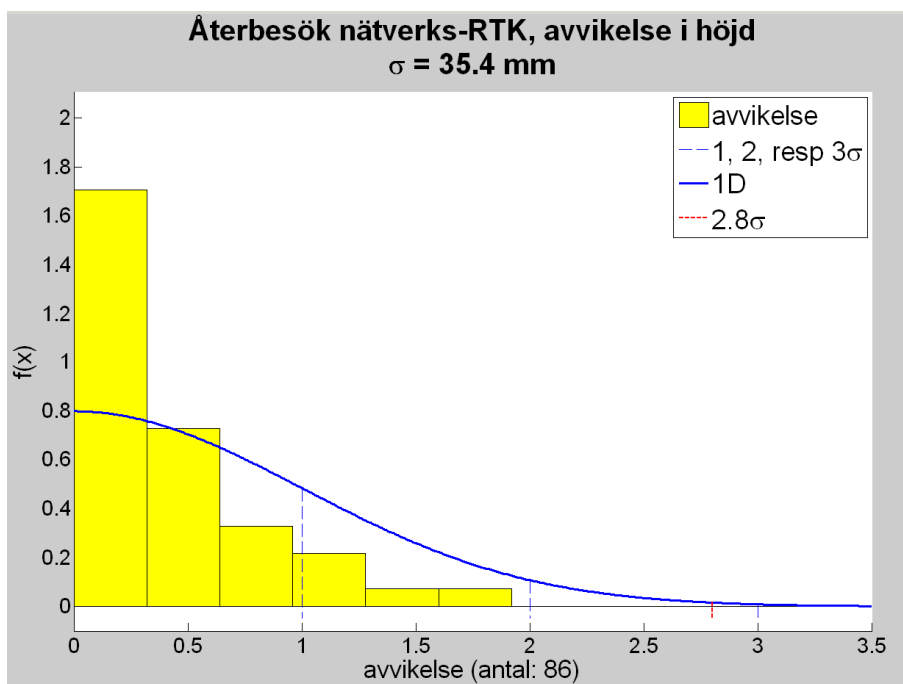


Figur 3.2: Histogram för kontrollmetoden "nätverks-RTK - totalstation, avvikelse i horisontellt avstånd" med noggrannhetsnivå 40 mm och 2,7 i täckningsfaktor.

Figur 3.2 visar tendensen till avplattning än tydligare. I denna kontrollmetod finns en inverkan från två centreringsmedelfel, ett från nätverks-RTK-stången och ett från prismastången. Kontrollmetoden gav därmed fler avvikelser än väntat som var större än två i täckningsfaktor och flera avvikelser som dessutom inte klarade noggrannhetsnivån.

Figur 3.3 visar histogrammet för kontrollmetoden "återbesök nätverks-RTK, avvikelse i höjd" med noggrannhetsnivå 100 mm och 2,8 i täckningsfaktor. De gula staplarna representerar avvikelser i höjd, den blåa fördelningskurvan är en "dubbelvikt" normalfördelningskurva (1D).

Histogrammet i figur 3.3 visar precis som RMS i tabell 3.3 att kontrollmetodens noggrannhetsnivå är för pessimistisk och behöver skärpas. Detta illustreras genom att fler avvikelser än väntat ligger under ett i täckningsfaktor.



Figur 3.3: Histogram för kontrollmetoden "återbesök nätverks-RTK, avvikelse i höjd" med noggrannhetsnivå 100 mm och 2,8 i täckningsfaktor.

Grundmedelfel för unitär transformation $s_{0,punkt}$ beräknades som beskrivet i avsnitt 2.3.4 och grundmedelfel för translation i höjd s_{hdiff} beräknades som beskrivet i avsnitt 2.3.3. Transformationsgrundmedelfelet i plan ($s_{0,punkt}$) är en skattning av den relativa positionsnoggrannheten och s_{hdiff} är standardavvikelsen (grundmedelfelet) för enskild avvikelse från relativ höjd. Allt detta redovisas i tabell 3.4 för område 1-3.

Tabell 3.4: Transformationsgrundmedelfelet i plan och standardavvikelsen för enskild avvikelse relativa höjder för område 1-3.

	Grundmedelfel unitär transformation plan, $s_{0,punkt}$ (mm)	Grundmedelfel translation i höjd, s_{hdiff} (mm)
Område 1	22,8	17,5
Område 2	24,8	7,3
Område 3	17,9	12,0
Förslag till noggrannhetsnivå (från tabell 2.5)	$s_{0,punkt} \leq 20$ mm	$s_{hdiff} \leq 35$ mm

Enligt värdena i tabell 3.4 klarar endast område 3 noggrannhetsnivån för $s_{0,punkt}$ medan alla områden klarar noggrannhetsnivån för s_{hdiff} . Grundmedelfelet i plan för område 1-3 i tabell 3.4 förstärker därmed

än en gång misstanken om att centreringsmedelfel är inblandat och påverkar resultatet.

3.2 Centreringsmedelfel och dess inverkan

Innan de nya noggrannhetsnivåerna kunde bestämmas utfördes en separat studie av centreringsmedelfelet som har visat sig ha en signifikant inverkan på resultatet av plan-kontrollen. Denna komponent kan bestämmas genom att använda ett stativ för prismastången. Innan studien genomfördes kalibrerades totalstationens kollimations- och kippaxelfel samt prismastångens lod.

De kontrollmetoder som påverkas av centreringsmedelfel är "återbesök nätverks-RTK, avvikelse i plan" och "nätverks-RTK - totalstation, avvikelse i horisontellt avstånd".

Kontrollmetoden för ett återbesök i plan som görs med nätverks-RTK har totalt fyra medelfelskomponenter som måste tas i beaktande, det vill säga två mätningar av samma punkt medför två medelfel i plan samt två centreringsmedelfel för nätverks-RTK-stången. Det totala medelfelet för kontrollmetoden blir alltså:

$$\sigma_{\text{totaltÅterbesök}}^2 = 2\sigma_{p,\text{nätverks-RTK}}^2 + 2\sigma_{c,\text{nätverks-RTK}}^2 \quad (3.2)$$

där

$$\sigma_{p,\text{nätverks-RTK}}^2 = \text{medelfel i plan för nätverks-RTK}$$

$$\sigma_{c,\text{nätverks-RTK}}^2 = \text{centreringsmedelfel för nätverks-RTK}$$

Vid den andra kontrollmetoden "nätverks-RTK - totalstation, avvikelse i horisontellt avstånd" finns det åtta medelfelskomponenter och de uppkommer då samma punkt inmäts två gånger med olika instrument. Notera att det precis som för ett a priori medelfel i horisontellt avstånd, förklarat i figur 2.5 samt ekvation 2.12, här handlar om att endast ett längsfel påverkar avståndet. På grund av att det är två ändpunkter som mäts in med både nätverks-RTK och totalstation blir det totala medelfelet för kontrollmetoden därmed:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{totaltAvst.}}^2 &= 2\sigma_{\text{längs,nätverksRTK}}^2 + 2\sigma_{c,\text{längs,nätverksRTK}}^2 + \\ &+ 2\sigma_{\text{längs,totalst.}}^2 + 2\sigma_{c,\text{längs,totalst.}}^2 = \\ &= \sigma_{p,\text{nätverks-RTK}}^2 + \sigma_{p,\text{totalst.}}^2 + \sigma_{c,\text{nätverks-RTK}}^2 + \sigma_{c,\text{totalst.}}^2 \end{aligned} \quad (3.3)$$

där

$$\sigma_{\text{längs,nätverks-RTK}}^2 = \text{längsmedelfel för nätverks-RTK}$$

$\sigma_{c,längs,nätverks-RTK}^2$ = centreringsmedelfel i längsled för nätverks-RTK

$\sigma_{längs,totalst.}^2$ = längsmedelfel för totalstationen

$\sigma_{c,längs,totalst.}^2$ = centreringsmedelfel i längsled för totalstationens prismastång

$\sigma_{p,totalst.}^2$ = medelfel i plan för totalstationen

$\sigma_{c,totalst.}^2$ = centreringsmedelfel för totalstationens prismastång

De totala medelfelen i ekvation 3.2 och 3.3 motsvaras av RMS för respektive ovanstående kontrollmetod, för område 1-3 tillsammans, där inget stativ har använts för nätverks-RTK-stången eller för prismastången.

I en separat studie bestämdes sedan ett nytt RMS för kontrollmetoden "nätverks-RTK - totalstation, avvikelse i horisontellt avstånd" där centreringsmedelfelet minimerades med hjälp av stativ för prismastången, se figur 3.4.



Figur 3.4: I en separat studie bestämdes ett nytt RMS med minimerat centreringsmedelfel för kontrollmetoden "nätverks-RTK - totalstation, avvikelse i horisontellt avstånd".

RMS för kontrollmetoden i den separata studien utan centreringsmedelfel för prismastången blev:

$$RMS_{utan\ c.} \approx 15,8\ mm \quad (3.4)$$

Med $RMS_{utan.c}$ ovan bestämdes sen centreringsmedelfelet genom att exkludera detta från RMS_{omr1-3} , som är RMS för område 1-3 för kontrollmetoden "nätverks-RTK - totalstation, avvikelse i horisontellt avstånd" med ett centreringsmedelfel för prismastången:

$$\sigma_{c,totalst.}^2 = RMS_{omr1-3}^2 - RMS_{utan.c.}^2 \quad (3.5)$$

Ett ytterligare sätt att beräkna centreringsmedelfelet var att använda grundmedelfelet för den unitära transformationen ($s_{0;punkt;omr1-3}$) för alla tre områdena (med centreringsmedelfel) och exkludera $RMS_{utan.c.}$:

$$\sigma_{c,totalst.}^2 = s_{0;punkt;omr1-3}^2 - RMS_{utan.c.}^2 \quad (3.6)$$

I tabell 3.5 redovisas RMS och grundmedelfel för område 1-3 med framräknat centreringsmedelfel. Centreringsmedelfelet beräknades med hjälp av ekvation 3.5 och 3.6; med ett medel av grundmedelfelen per punkt för område 1-3, samt med ett medel av RMS för kontrollmetoden "nätverks-RTK - totalstation, avvikelse i horisontellt avstånd" för område 1-3 (med centreringsmedelfel).

Tabell 3.5: En sammanställning över RMS och framräknat centreringsmedelfel för kontrollmetoden "nätverks-RTK - totalstation, avvikelse i horisontellt avstånd".

RMS_{omr1-3} (mm)	20,9
$RMS_{utan.c.}$ (mm)	15,8
$\rightarrow \sigma_{c,totalst}$ (mm)	13,7
$s_{0;punkt;omr 1-3}$ (mm)	21,2
$RMS_{utan.c.}$ (mm)	15,8
$\rightarrow \sigma_{c,totalst}$ (mm)	14,2

Tabell 3.5 visar att centreringsmedelfelet är av storleksordningen 14 mm. Det förutsätts att ett centreringsmedelfel för nätverks-RTK-stången är av samma storleksordning som för prismastången.

3.3 Nya noggrannhetsnivåer/felgränser

3.3.1 Plan- och höjdkontroller

De nya noggrannhetsnivåerna bestämdes bland annat av RMS för kontrollerna och skattningar av grundmedelfelet i plan för unitära transformationen, samt av grundmedelfelet för translationen i höjd. Dock eliminerades ett centreringsmedelfels påverkan på noggrannhetsnivån för kontrollmetoden "nätverks-RTK - totalstation, avvikelse i horisontellt avstånd" genom att använda stativ för totalstationens prismastång.

För medelfelet i plan för nätverks-RTK har resultat från en annan studie använts, där det nya medelfelet i plan uppskattades som bäst till 10 mm (*Edwards et al. 2008*).

Medelfelet i plan för totalstationen har från tidigare studier bedömts ligga i storleksordningen 5 mm och centreringsmedelfelet förutsätts vara lika stor för nätverks-RTK-stången som för prismastången (14 mm, se tabell 3.5) (*Persson 2008c*).

Genom ovanstående förutsättningar och med hjälp av ekvation 3.3, utan centreringsmedelfel, skattades kontrollmetodens "nätverks-RTK - totalstation, avvikelse i horisontellt avstånd" totala medelfel på följande sätt:

$$\begin{aligned}\sigma_{totalAvst.}^2 &= \sigma_{p,nätverks-RTK}^2 + \sigma_{c,nätverks-RTK}^2 + \sigma_{p,totalst.}^2 = \\ &= 10^2 + 14^2 + 5^2 \rightarrow \sigma_{totalAvst.} \approx 17,9 \text{ mm}\end{aligned}\tag{3.7}$$

Grundmedelfelet i plan ($s_{0;punktNy}$) kunde därmed skattas med ekvation 2.22 enligt:

Förutsättningar :

$$\sigma_{totalAvst.} = 17,9 \text{ mm}\tag{3.8}$$

$$n = 20$$

$$\rightarrow s_{0;punktNy} \leq 17,9(0,96 + (2 \cdot 20 - 3)^{-0,4}) \approx 25 \text{ mm}$$

För att kunna bestämma noggrannhetsnivåerna för kontrollmetoder i höjd erfordras en skattning av standardavvikelsen s_{hdiff} för translation. Först måste dock en ny $\sigma_{höjd}$ skattas. $\sigma_{höjdNy}$ i tabell 3.6 baseras på ett medel av de poolade grundmedelfelen för translation för område 1-3 (tabell 3.4) samt på $\sigma_{höjd}$ som är beräknat från poolade RMS för kontrollmetoderna i höjd för område 1-3 (tabell 3.3). Medel ($\sigma_{höjdNy}$) avrundades upp till jämnt 5-tal.

Tabell 3.6: En skattning av $\sigma_{\text{höjdNy}}$ för kontrollmetoderna i höjd baserat på område 1-3.

Test av, samt formel	RMS (mm)	Medelfel, $\sigma_{\text{höjdNy}}$ (mm)
Återbesök nätverks-RTK, avvikelse i höjd: $RMS = \sigma_{\Delta h \rightarrow}$ $\rightarrow \sigma_{\text{höjd}} = \sigma_{\Delta h} / \sqrt{2} = RMS / \sqrt{2}$	20,3	14,3
Nätverks-RTK - totalstation, avvikelse i höjdskillnad: $RMS = \sigma_{\Delta h \rightarrow}$ $\rightarrow \sigma_{\text{höjd}} = \sigma_{\Delta h} / \sqrt{2} = RMS / \sqrt{2}$	14,5	10,2
Nätverks-RTK - totalstation, enskild avvikelse relativa höjder: $RMS = \sigma_{\text{höjd}}$	10,8	10,8
	S_{hdiff}	
Grundmedelfel translation i höjd, $S_{\text{hdiff}} = \sigma_{\text{höjd}}$	11,2	11,2
	$\rightarrow \sigma_{\text{höjdNy}} \approx$	15 mm

Med ekvation 2.18 skattades därmed S_{hdiffNy} och avrundades till jämt 5-tal enligt:

Förutsättningar :

$$\sigma_{\text{höjdNy}} = 15 \text{ mm} \quad (3.9)$$

$$n = 20$$

$$\rightarrow s_{\text{hdiffNy}} \leq 15(0,96 + (20 - 1)^{-0,4}) \approx 20 \text{ mm}$$

De nya noggrannhetsnivåerna bestämdes sedan pragmatiskt. Nytt σ för varje kontroll motsvarar ett poolat RMS för område 1-3 (tabell 3.3), förutom för kontrollen "Nätverks-RTK - totalstation, enskild avvikelse relativa höjder" där den poolade standardavvikelsen är nytt σ (tabell 3.4). Dessutom gäller även ett undantag för kontrollen "Nätverks-RTK - totalstation, avvikelse i horisontellt avstånd" där det nya σ motsvaras av RMS för den separata studien utan centreeringsmedelfel för prismastången (ekvation 3.4).

Ny täckningsfaktor är ny noggrannhetsnivå dividerat med nytt σ . Ny noggrannhetsnivå för $s_{0,\text{punkt}}$ samt S_{hdiff} är beräknat i ekvation 3.8 och 3.9.

Allt detta sammanfattas i tabell 3.7 tillsammans med de gamla noggrannhetsnivåerna från avsnitt 2.3.5.

Tabell 3.7: Nya skattade noggrannhetsnivåer baserade på område 1-3 och separat studie, i jämförelse med de gamla förslagen.

Test av	Ny noggrannhetsnivå (mm)	Nytt σ (mm)	Ny täckningsfaktor	Gammal noggrannhetsnivå (mm)	Gammalt σ (mm)	Gammal täckningsfaktor
Återbesök nätverks-RTK, avvikelser i plan	60	24	2,5	55	21	2,6
Återbesök nätverks-RTK, avvikelser i höjd	60	21	2,9	100	35	2,8
Nätverks-RTK - totalstation, avvikelser i horisontellt avstånd	45	16	2,8	40	15	2,7
Nätverks-RTK - totalstation, avvikelser i höjdskillnad	50	15	3,4	100	35	2,8
Nätverks-RTK - totalstation, enskild avvikelser i relativa höjder	40	11	3,5	70	25	2,8
Grundmedelfel unitär transformation i plan $s_{0,punkt}$	25	18	1,4	20	15	1,3
Grundmedelfel translation i höjd s_{hdiff}	20	15	1,3	35	25	1,4

Notera att nytt σ för kontroll i plan på 24 respektive 16 mm i tabell 3.7 verifierar den brittiska studien och medelfelet i plan (som bäst) på 10 mm (*Edwards et al. 2008*). Detta kan härledas genom att använda ekvation 3.2 och 3.3 och avrunda uppåt till jämnt 5-tal:

Förutsättningar :

$$\sigma_{c,nätverks-RTK}^2 = 14 \text{ mm}$$

$$\sigma_{p,totalst.}^2 = 5 \text{ mm}$$

$$\sigma_{c,totalst.}^2 = 14 \text{ mm}$$

ger

$$\sigma_{totaltÅterbesök}^2 = 2\sigma_{p,nätverks-RTK}^2 + 2\sigma_{c,nätverks-RTK}^2 = 24^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \sigma_{p,nätverks-RTK} = \sqrt{\frac{24^2 - 2 \cdot 14^2}{2}} \approx 10 \text{ mm} \quad (3.10)$$

$$\sigma_{totaltAvst.}^2 = \sigma_{p,nätverks-RTK}^2 + \sigma_{p,totalst.}^2 + \sigma_{c,nätverks-RTK}^2 = 16^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \sigma_{p,nätverks-RTK} = \sqrt{16^2 - 14^2 - 5^2} \approx 10 \text{ mm}$$

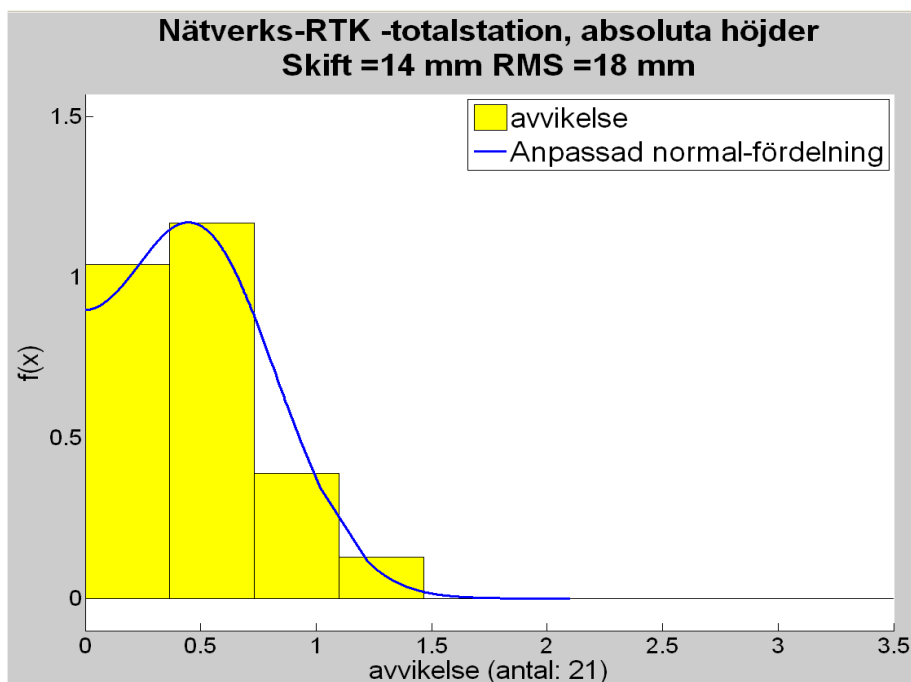
Tabell 3.6 visar precis som tabell 3.7 att medelfelet i höjd (exklusive felet i geoidmodellen) ligger i storleksordningen 15 mm, som även det verifierar den brittiska studien som fick denna noggrannhet som bäst (*Edwards et al. 2008*).

3.3.2 Absoluta höjder och skift

Genom variansanalys har noggrannhetsnivåer för enskild avvikelse absoluta höjder skattats till 50-70 mm, RMS_{hdiff} till 25-35 mm och skiftet till 10-15 mm, allt baserat på område 1-3. Clas-Göran Persson har kompletterat detta arbete med dessa beräkningar (*Persson 2008c*).

Ett exempel på ett skattat skift visas i figur 3.5, där histogrammet avser kontrollmetoden "nätverks-RTK - totalstation, absoluta höjder". De gula staplarna representerar enskilda avvikelser från absoluta höjder, och den blåa fördelningskurvan är en anpassad normalfördelningskurva skapad med kvantitativ dataanalys (*Persson 2008c*).

Skiftet i histogrammet i figur 3.5 visade sig ligga i storleksordningen 14 mm och RMS_{hdiff} 18 mm, vilket i detta exempel indikerar att skiftet går att hantera och att det är rimligt att ta bort. Det är dock viktigt att påpeka att skiftet kan skilja sig väsentligt i olika delar av Sverige, samt att skattningen av skiftet skiljer sig under olika tidsperioder.



Figur 3.5: Exempel på histogram för kontrollmetoden " nätverks-RTK -totalstation, absoluta höjder".

3.3.3 "Kända" punkter

Den nya noggrannhetsnivån för $s_{0,punkt}$ på 25 mm (ekvation 3.8) kan användas för att skatta nya toleranser för nätverks-RTK-mätning (utan stativ för nätverks-RTK-stången) av tidigare koordinatbestämda punkter. Genom ekvation 2.24 och 2.25 kan noggrannhetsnivån beräknas på följande sätt (förutsatt att medelfelet i plan för nätverks-RTK är 10 mm, ekvation 3.10, och centreringsmedelfelet för nätverks-RTK-stången är 14 mm, tabell 3.5):

Förutsättningar :

$$\sigma_{plan} = \sqrt{\sigma_{p,nätverks-RTK}^2 + \sigma_{c,nätverks-RTK}^2} = \sqrt{10^2 + 14^2} \approx 18 \text{ mm}$$

$$Max(s_{0,punkt}) \approx 25 \text{ mm}$$

$$\Delta = 2Max(s_{0,punkt}) \approx 50 \text{ mm}$$

$$\Delta'' = \frac{\Delta}{\sigma_{plan}} \sqrt{\sigma_{plan}^2 + \sigma_{"känd" punkt}^2} = 50 \sqrt{18^2 + \sigma_{"känd" punkt}^2} / 18 =$$

$$= 50 \sqrt{1 + (\sigma_{"känd" punkt} / 18)^2}$$

Nya noggrannhetsnivåer för nätverks-RTK-mätning (utan stativ för nätverks-RTK-stången) av tidigare koordinatbestämda punkter, med olika antaganden om punkternas noggrannhet, presenteras i tabell 3.8.

Tabell 3.8 Nya noggrannhetsnivåer för nätverks-RTK-mätning av sedan tidigare koordinatbestämda punkter utan stativ för nätverks-RTK-stången, samt med olika antaganden om punkternas noggrannhet.

$\sigma_{\text{"känd" punkt}}$	0 mm	6 mm	12 mm	18 mm
Δ "	50 mm	52 mm	60 mm	70 mm

Används dock ett stativ för nätverks-RTK-stången vid återbesöket förutsätts istället σ_{plan} vara 10 mm, ekvation 3.10, och $\text{Max}(s_{0;\text{punkt}})$ kan därmed beräknas om som (ekvation 2.22):

$$\text{Max}(s_{0;\text{punkt}}) = 10(0.96 + (2 \cdot 20 - 3)^{-0.4}) \approx 15 \text{ mm}$$

Noggrannhetsnivån kan därefter "skalas om" som följande:

Förutsättningar :

$$\sigma_{\text{plan}} = 10 \text{ mm}$$

$$\Delta = 2\text{Max}(s_{0;\text{punkt}}) \approx 30 \text{ mm}$$

$$\begin{aligned} \Delta'' &= \frac{\Delta}{\sigma_{\text{plan}}} \sqrt{\sigma_{\text{plan}}^2 + \sigma_{\text{"känd" punkt}}^2} = 30 \sqrt{10^2 + \sigma_{\text{"känd" punkt}}^2} / 10 = \\ &= 30 \sqrt{1 + (\sigma_{\text{"känd" punkt}} / 10)^2} \end{aligned}$$

Tabell 3.9 presenterar nya noggrannhetsnivåer för nätverks-RTK-mätning av sedan tidigare koordinatbestämda punkter med stativ för nätverks-RTK-stången, och med olika antaganden om punkternas noggrannhet.

Tabell 3.9 Nya noggrannhetsnivåer för nätverks-RTK-mätning av sedan tidigare koordinatbestämda punkter med stativ för nätverks-RTK-stången, samt med olika antaganden om punkternas noggrannhet.

$\sigma_{\text{"känd" punkt}}$	0 mm	3 mm	6 mm	10 mm
Δ "	30 mm	31 mm	35 mm	45 mm

Centreringsmedelfelet påverkan vid kontrollen ger alltså en väsentlig skillnad på flera mm mellan noggrannhetsnivåerna i tabell 3.8 och 3.9. Noterbart från tabell 3.8 och 3.9 är även att ett punktmedelfel på "känd" punkt på mer än σ_{plan} gör att en punkt inte längre kan betraktas som "känd".

3.3.4 Sammanställning av nya noggrannhetsnivåer

En sammanställning av de i avsnitt 3.3.1-3.3.3 modifierade nya noggrannhetsnivåerna presenteras nedan:

- **Återbesök nätverks-RTK - i samband med ursprungsmätningen eller som särskild kontrollåtgärd:**
 - avvikelse i plan ≤ 60 mm
 - avvikelse i höjd ≤ 60 mm
- **Nätverks-RTK-mätning av tidigare koordinatbestämd punkt:**
 - avvikelse i plan $\leq 50-70$ mm (utan stativ för nätverks-RTK-stången)
 - avvikelse i plan $\leq 30-45$ mm (med stativ för nätverks-RTK-stången)
- **Kontroll med totalstation av punkt ursprungligen inmätt med nätverks-RTK:**
 - unitär transformation: grundmedelfel per koordinat $S_{0;koordinat} \leq 20$ mm
 - (grundmedelfel per punkt $S_{0;punkt} \leq 25$ mm)
 - avvikelse i horisontellt avstånd ≤ 45 mm
 - translation i höjd: standardavvikelse $S_{hdiff} \leq 20$ mm
 - avvikelse i höjdskillnad ≤ 50 mm
 - enskild avvikelse relativa höjder ≤ 40 mm
 - absoluta höjder: kvadratisk medelavvikelse $RMS_{hdiff} \leq 25-35$ mm
 - enskild avvikelse absoluta höjder $\leq 50-70$ mm
 - signifikant skift $\geq 10-15$ mm.

3.4 Test av nya noggrannhetsnivåer/felgränser: Område 4

För att testa om de nya noggrannhetsnivåerna är tillämpningsbara testades de med mätningar i ett nytt oberoende område. Ett krav var att området skulle vara lokaliserat i en annan del av Gävle jämfört med föregående områden. Detta för att erhålla en bra geometrisk spridning mellan samtliga områden. Området som valdes är ett bostadsområde i Stigslund och är markerat med en röd ring i figur 3.6.

Ytterligare ett krav var att området skulle vara av ungefär samma karaktär som område 3, det vill säga ha en varierande terräng med sikthinder och öppna ytor, för bilder se bilaga 2.



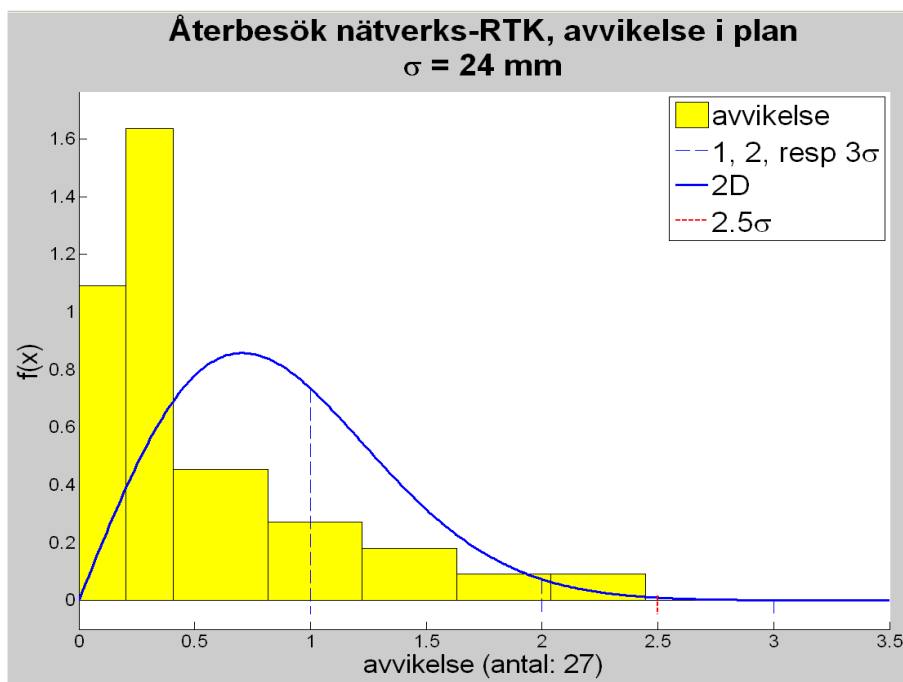
Figur 3.6: Mätområdet som valdes för att testa de nya noggrannhetsnivåerna är ett bostadsområde i Stigslund och är markerat med en röd ring (© Lantmäteriet Gävle 2009. Medgivande I 2008/1948, samt editerad).

Antal inmätta kontrollerade detaljpunkter var 21 och en höjdfix användes för anslutning i höjd. Alla kontrollerade detaljpunkterna har kontrollerats både med återbesök med nätverks-RTK och genom inmätning med totalstation. Tabell 3.10 visar antalet avvikelser i plan, höjd, horisontella avstånd, höjdskillnader, enskilda avvikelser relativa höjder och avvikelser absoluta höjder beräknat från kontrollerade punkter enligt avsnitt 2.2.

Tabell 3.10: Antal kontroller: avvikelser i plan, höjd, horisontella avstånd, höjdskillnader, enskilda avvikelser relativa höjder och avvikelser absoluta höjder.

	Antal
Återbesök nätverks-RTK, avvikelser plan	27
Återbesök nätverks-RTK, avvikelser höjd	27
Nätverks-RTK - totalstation, avvikelser horisontellt avstånd	70
Nätverks-RTK - totalstation, avvikelser höjdskillnader	70
Nätverks-RTK - totalstation, enskilda avvikelser relativa höjder	21
Nätverks-RTK - totalstation, avvikelser absoluta höjder	21

Histogrammet för den första kontrollmetoden "återbesök-RTK, avvikelse i plan" visas i figur 3.7 med den nya noggrannhetsnivån 60 mm och 2,5 i täckningsfaktor. De gula staplarna representerar avvikelser i plan, den blåa fördelningskurvan är en Weibull fördelningskurva i 2D.

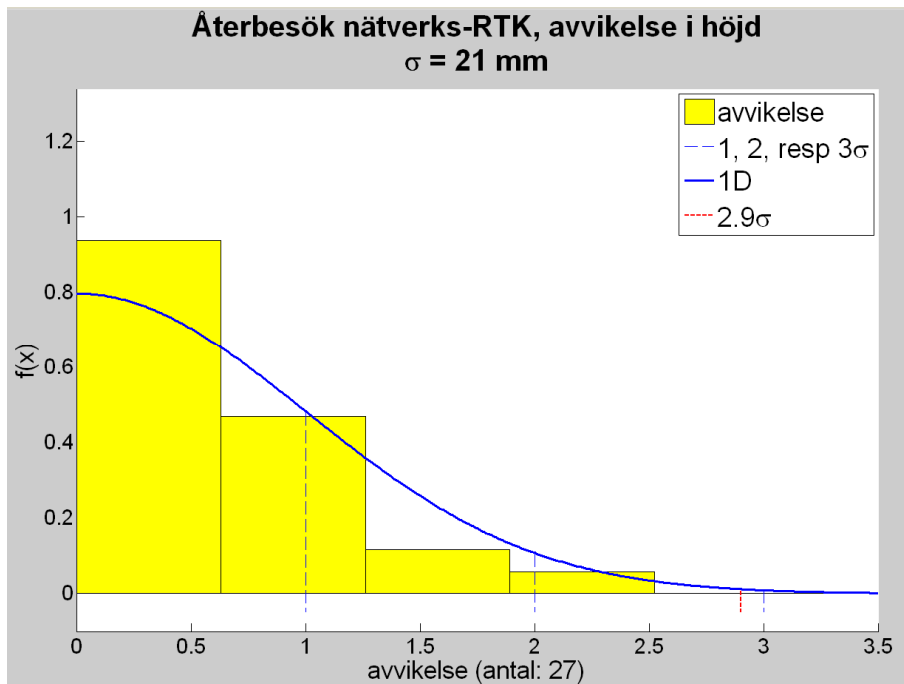


Figur 3.7: Histogram för kontrollmetoden "återbesök nätverks-RTK, avvikelse i plan" med ny noggrannhetsnivå 60 mm och 2,5 i täckningsfaktor.

Alla avvikelser klarar enligt figur 3.7 noggrannhetsnivån. Dock har histogrammet ett oväntat utseende där flertalet avvikelser ger en topp nära noll och resterande avvikelser därefter ser ut att vara andra oberoende mätningar från ett mer problematiskt område, fast det egentligen är samma område. Detta kan förklaras genom områdets speciella karaktär där hög variation förekom i form av sikthinder från höghus på hela 10 våningar, till i princip öppna ytor i form av parkeringar (se bilaga 2 för bilder).

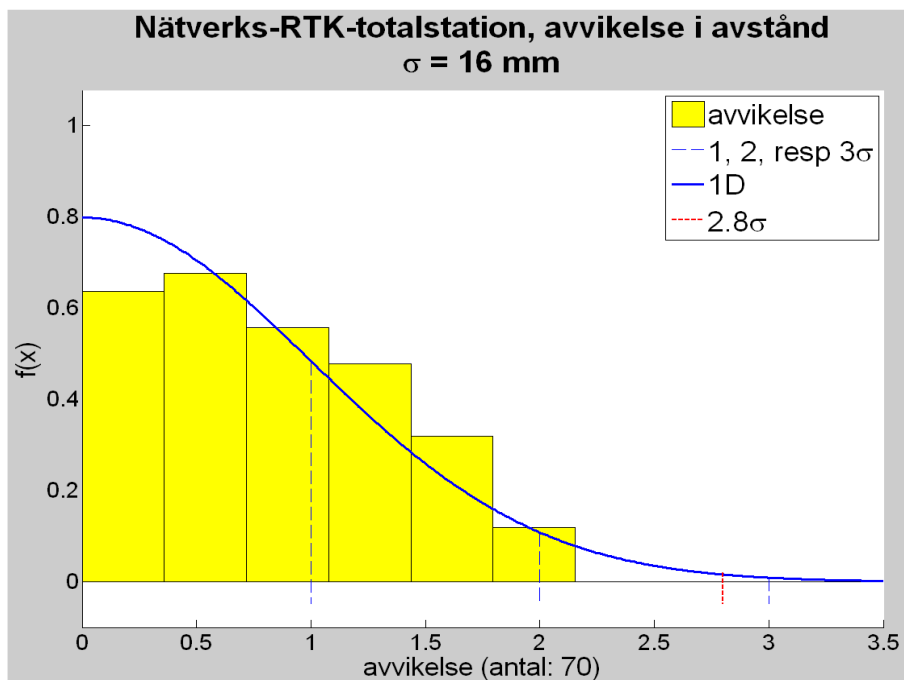
Kontrollmetoden "återbesök nätverks-RTK, avvikelse i höjd" visas i figur 3.8 med den nya noggrannhetsnivån 60 mm och 2,9 i täckningsfaktor. Den blåa fördelningskurvan är en "dubbelvikt" normalfördelningskurva och de gula staplarna representerar avvikelser i höjd.

Resultatet från inmätningar med nätverks-RTK i höjd i figur 3.8 visar på att alla avvikelser klarar den nya noggrannhetsnivån. Dock kvarstår en liten topp på grund av att noggrannhetsnivån fortfarande är för pessimistisk i förhållande till avvikelserna.



Figur 3.8: Histogram för kontrollmetoden "återbesök nätverks-RTK, avvikelse i höjd" med ny noggrannhetsnivå 60 mm och 2,9 i täckningsfaktor.

Figur 3.9 visar histogram för kontrollmetoden "nätverks-RTK - totalstation, avvikelse i horisontellt avstånd" och för denna kontrollmetod har ett stativ använts för totalstations prismastång. Kontrollmetoden har den nya noggrannhetsnivån 45 mm och 2,8 i täckningsfaktor. Den blåa fördelningskurvan är en "dubbelvikt" normalfördelningskurva och de gula staplarna representerar avvikelser i horisontellt avstånd.

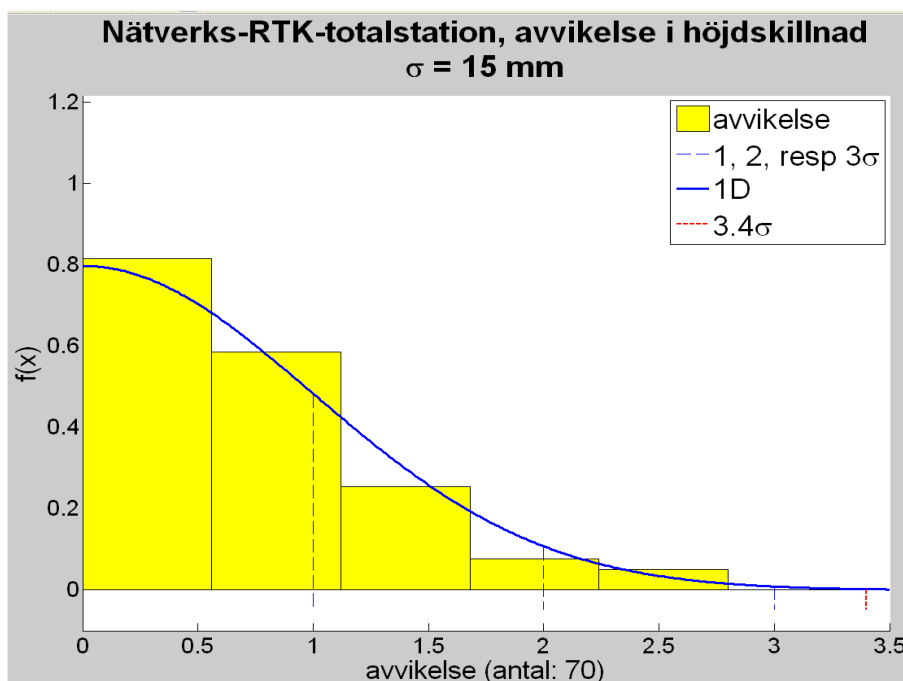


Figur 3.9: Histogram är för kontrollmetoden "nätverks-RTK - totalstation, avvikelse i horisontellt avstånd" med ny noggrannhetsnivå 45 mm och 2,8 i täckningsfaktor.

Alla avvikelser i figur 3.9 klarade noggrannhetsnivån och visar en tydlig förbättring när ett stativ använts för totalstationens prisma-stång vid kontrollen. Detta visas i figuren genom att histogrammet inte har samma tendens till att "plattas ut", till skillnad mot mätningarna utan stativ för område 1-3 (figur 3.2).

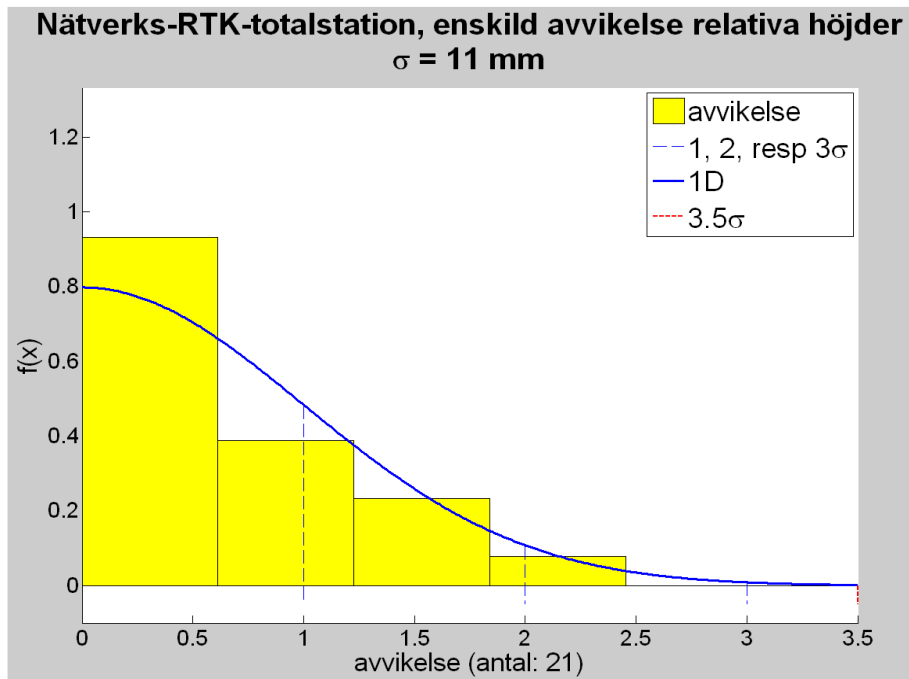
Figur 3.10 visar histogrammet för kontrollmetoden "nätverks-RTK - totalstation, avvikelse i höjdskillnad" med noggrannhetsnivån 50 mm och 3,4 i täckningsfaktor. De gula staplarna representerar avvikelser i höjdskillnad, den blåa fördelningskurvan är en "dubbelvikt" normalfördelningskurva (1D).

Histogrammet i figur 3.10 visar på en i princip felfri anpassning till den teoretiska kurvan och alla avvikelser klarade noggrannhetsnivån.



Figur 3.10: Histogram för kontrollmetoden "nätverks-RTK - totalstation, avvikelse i höjdskillnad" med ny noggrannhetsnivå 50 mm och 3,4 i täckningsfaktor.

Figur 3.11 visar histogrammet för kontrollmetoden "nätverks-RTK - totalstation, enskild avvikelse relativa höjder" med nya noggrannhetsnivån 40 mm och 3,5 i täckningsfaktor. De gula staplarna representerar enskilda avvikelser i relativa höjder, den blåa fördelningskurvan är en "dubbelvikt" normalfördelningskurva (1D).



Figur 3.11: Histogram för kontrollmetoden "nätverks-RTK - totalstation, enskild avvikelse relativa höjder" med ny noggrannhetsnivå 40 mm och 3,5 i täckningsfaktor.

Histogrammet i figur 3.11 visar att alla avvikelser visade sig klara noggrannhetsnivån. Dock kvarstår en topp som troligen beror på att noggrannhetsnivån fortfarande är för pessimistisk.

4 Diskussion

Detta examensarbete avser en noggrannhetsundersökning av detaljmätning med nätverks-RTK. Modifiering av de föreslagna noggrannhetsnivåerna har baserats på ett ganska omfattande material av mätningar, beräkningar, analyser, och överväganden. Slutligen verifierades de nya noggrannhetsnivåerna med resultat av mätningar från ett fjärde oberoende område, där stativ användes för totalstationens prismastång för att minimera centreringsmedelfelet påverkan på kontrollen i plan.

4.1 Kontrollförfarande

De föreslagna kontrollerna visade sig vara praktiskt tillämpbara då arbetsinsatsen för att använda dessa inte ansågs vara alltför krävande. Det är realistiskt att återbesöka punkter med nätverks-RTK när det ändå ska göras ytterligare detaljmätningar i närheten. Den separata kontrollen med totalstation kan tänkas passa i en beställarroll när beställaren vill att en sådan kontroll ska genomföras.

Markering av tänkbara kontrollpunkter visade sig ha stor betydelse för att ha möjlighet att vid ett senare tillfälle hitta tillbaka till punkterna. Av samma anledning var protokollföringen och skiss över punkternas lokalisering viktig. Det kan vara lämpligt, precis som förfarandet i detta arbete, att avsätta en kontrollpunkt för varje ny fixlösning. Detta för att erhålla en "kontroll" av de punkter som mätts in med den aktuella fixlösningen, vilket medför att antalet kontrollpunkter inte behöver vara överdrivet många relativt antalet detaljmätningar. Det handlar i slutänden om att planera hur detaljmätningarna ska utföras för att på effektivaste sätt kontrollera mätningarna.

4.2 Nya noggrannhetsnivåer/felgränser

Centreringsmedelfelet inverkan på resultatet i plan (kontroll med totalstation) kan som nämnts minimeras genom att använda stativ för totalstationens prismastång. Detta anses vara rimligt då ett sådant stativ som använts i denna studie (figur 3.4) inte är särskilt ansträngande att ta med sig på de få punkter som kontrolleras. Där emot att använda ett stativ för nätverks-RTK-stången vid detaljmätningen, för att minimera det centreringsmedelfelet, anses inte vara realistiskt.

En intressant iakttagelse angående de nya noggrannhetsnivåerna är att återbesök för plan och höjd (tabell 3.7) visade sig ligga i samma storleksordning på 60 mm. Det beror på att höjdnoggrannheten var

bättre än väntat samt på att plannoggrannheten var sämre på grund av centreringsfelen. Sänkningen av noggrannhetsnivån i höjd och höjningen av noggrannhetsnivån i plan gjorde att de "möttes" vid 60 mm. Slutligen finns det i tabell 3.7 en intressant skillnad mellan två noggrannhetsnivåer, som i teorin ska vara lika, det vill säga "återbesök nätverks-RTK, avvikelse i höjd" (60 mm) och "nätverks-RTK - totalstation, avvikelse i höjdskillnad" (50 mm). Orsaken till den lägre nivån på 50 mm kan vara att det finns korrelationer för de avvikelser i höjdskillnader som beräknas mellan gemensamma punkter.

4.3 Slutsatser

Detta arbete visade som nämnts på ett medelfel i plan på 10 mm (tabell 3.7 och ekvation 3.10) och ett medelfel i höjd (exklusive felet i geoidmodellen) på 15 mm (tabell 3.6) för detaljmätning med nätverks-RTK. Noggrannheten i plan förutsätter dock någon form av tvångscentrering för att minimera centreringsfelens påverkan på noggrannheten. Noggrannhetsnivån i höjd har dessutom lagts på en sämre nivå än vad som egentligen uppnåddes på grund av att förhållandena under detta arbete bedömdes som särskilt gynnsamma.

Dock kan höjdnoggrannheten förbättras genom en ny geoidmodell, SWEN08, som lanserades i januari i år. Den antas ge ett medelfel på 10-15 mm i hela landet (förutom i fjällen) (*Ågren 2009*). En tanke är dessutom att en tjänst skulle kunna utvecklas där solfläcksaktiviteten med mera uppdateras kontinuerligt och varnar användaren när det är olämpligt att mäta med nätverks-RTK (*KTH 2009*).

GNSS-antennens elektriska centrum påverkas bland annat av elevationen, flervägsfelen och typ av montering av antennen (stång, stativ, trefot, pelare) etc. Olika antenner är olika känsliga, därför är det viktigt att välja rätt typ av antenn vid mätning med SWEPOS Nätverks-RTK-tjänst. För att elevationsberoendet ska behandlas på bästa sätt av antennens antenmodell kan det rekommenderas att rikta antennens norr-markering mot norr. Denna norr-markering bestäms vid kalibreringen av antennen (*Jivall 2007*).

Andra faktorer som kan påverka noggrannheten är avstånd till referensstationer, lokalisering inom eller utanför SWEPOS-nätverket, etc. Sammantaget kan de modifierade noggrannhetsnivåerna i detta arbete på sikt omformas till felgränser; men då krävs fler projekt på olika platser, utspjutt i tiden och under andra förhållanden.

En rekognosering över det planerade mätområdet är att rekommendera för att undersöka om det är möjligt att mäta med nätverks-RTK. Det kanske finns alldeles för många bidragande felkällor som påverkar noggrannheten i mätningarna på den platsen, och för den aktuella tidpunkten. Vid sådana situationer bör det övervägas om andra mätmetoder lämpar sig bättre.

Referenser

Edwards S, Clarke P, Goebell S, Penna N, 2008: An examination of commercial network RTK GPS services in Great Britain. School of Engineering and Geosciences, Newcastle University, Newcastle.

Eriksson G, 2002: Numeriska algoritmer med Matlab. Numerisk analys och Datalogi, Kungliga Tekniska Högskolan, Stockholm.

Fan H, 1997: Theory of Errors and Least Squares Adjustment. Royal Institute of Technology, Department of Geodesy and Photogrammetry, Kungliga Tekniska Högskolan, Stockholm.

Fan H, 2007: Theoretical Geodesy. Royal Institute of Technology, Department of Geodesy and Photogrammetry, Kungliga Tekniska Högskolan, Stockholm.

HMK-Ge:D, 1994: Handbok till mätningsskugörelsen, Geodesi, Detaljmätning. Lantmäteriverket, Gävle.

HMK-Ge:S, 1992: Handbok till mätningsskugörelsen, Geodesi, Stommätning. Lantmäteriverket, Gävle.

Jivall L, 2007: Antennmodellering vid GNSS-mätning. SWEPOS-seminariet 16 oktober 2007, Lantmäteriet, Gävle. Url: <http://swepos.lmv.lm.se/seminarium/swepos-sem07/swepsem07-Antennmodellering.pdf>, besökt 2009-02-11

Johansson D, 2004: SKAN-RTK – 2 – nätverks-RTK i produktionstest i södra Sverige. Rapportserie: Geodesi och Geografiska informationssystem, 2004:12, Lantmäteriet, Gävle.

Johnsson F & Wallerström M, 2007: En nätverks-RTK-jämförelse mellan GPS och GPS/Glonass. Rapportserie: Geodesi och Geografiska informationssystem, 2007:1, Lantmäteriet, Gävle.

Jonsson A & Nordling A, 2003: Jämförelse av enkelstations-RTK och nätverks-RTK i Lantmäteriets testnät. Rapportserie: Geodesi och Geografiska informationssystem, 2003:12, Lantmäteriet, Gävle.

Kempe C, 2004: Väst-RTK – nätverks-RTK i produktionstest i västra Sverige. Rapportserie: Geodesi och Geografiska informationssystem, 2004:11, Lantmäteriet, Gävle.

Lidberg M, 1998: Litteraturstudie om RTK-tekniken – ett samarbetsprojekt mellan Banverket, Lantmäteriverket och Vägverket. Rapportserie: Geodesi och Geografiska informationssystem, 1998:3, Lantmäteriet, Gävle.

Lilje C, Engfeldt A, Jivall L, 2007: Introduktion till GNSS. Rapportserie: Geodesi och Geografiska informationssystem, 2007:11, Lantmäteriet, Gävle.

Norin D, Engfeldt A, Johansson D, Lilje C, 2006: Kortmanual för mätning med SWEPOS Nätverks-RTK-tjänst. Rapportserie: Geodesi och Geografiska informationssystem, 2006:2, Lantmäteriet, Gävle.

Norin D, Jonsson B, Wiklund P, 2008: SWEPOS and its GNSS-based Positioning Services, 2008. FIG Working Week 14-19 juni 2008, FIG, Stockholm.

Sjöberg L, 2007: Theory of satellite geodesy. Royal Institute of Technology, Geodesy, Kungliga Tekniska Högskolan, Stockholm.

Trimble 5600 DR, specifikation. Trimble. Url: <http://www.geotech-co.com/Total%20Stations/Datasheets&specifications5800.pdf>, besökt 2009-02-09

Vännman K, 2002: Matematisk statistik. Studentlitteratur, Luleå tekniska universitet, Luleå.

Ågren J & Svensson R, 2007: Beskrivning av de nationella geoidmodellerna SWEN05_RH2000 och SWEN05_RH70.

Lantmäteriet, Gävle. Url:

http://www.lantmateriet.se/upload/filer/kartor/geodesi_gps_och_detaljmatning/Referenssystem/Geoiden_och_hojdkorrmodeller/Geoiden/Geoidmodeller_2005.pdf, besökt 2008-10-01

Ågren J 2009: Beskrivning av de nationella geoidmodellerna SWEN08_RH2000 och SWEN08_RH70. Rapportserie: Geodesi och Geografiska informationssystem, 2009:1, Lantmäteriet, Gävle.

Internet källor

RSA, 2009: Russian Space Agency. Url: <http://www.glonass-ianc.rsa.ru/pls/htmldb/f?p=202:1:16426562032841918400>, besökt 2009-02-12

SWPC, 2009: Space Weather Prediction Center. Url: <http://www.swpc.noaa.gov/SolarCycle/>, besökt 2009-02-12

Muntliga källor

Jonsson B, 2009: 2009-02-17, Lantmäteriet, Gävle.

KTH, 2009: Diskussion av åhörare vid redovisning av detta examensarbete. Kungliga Tekniska Högskolan, 5 februari 2009, Stockholm.

Persson C-G, 2008a: Detaljmätning med nätverks-RTK – förslag till felgränser. Opublicerat PM, Lantmäteriet, Gävle.

*Persson C-G, 2008b: Några betraktelser över begreppet noggrannhet.
Opublicerat PM, Lantmäteriet, Gävle.*

Persson C-G, 2008c: 2008-12-15, Lantmäteriet, Gävle.

Bilagor

Bilaga 1 – Approximation av F-fördelningen på 5 % risknivå med Gauss-Newtons metod

Den storlek på ett medelfel som bör tolereras i förhållande till motsvarande teoretiska värde beror på antalet överbestämningar. En god approximation för dessa felgränser utgående från F-fördelning på 5 % risknivå kan beräknas genom Gauss-Newtons metod för icke-linjära system (HMK-Ge:S 1992, Eriksson 2002):

$$f = a + \ddot{o}^{-b} - \sigma \quad (B.1)$$

där

f = den icke-linjära funktionen för det maximala grundmedelfelet anpassad efter F-fördelning på 5 % risknivå

a = sökt konstant

\ddot{o} = antalet överbestämningar

b = sökt konstant

σ = maximala medelfelet enligt F-fördelning på 5 % risknivå.

Det är viktigt att sätta funktionen på normalform ($f = 0$) för att kunna lösa systemet, och därför subtraheras det maximala medelfelet taget från F-fördelningstabellen för 5 % risknivå, σ , från f . Vektorn f definieras som ett antal funktioner, där antalet överbestämningar, \ddot{o} , skiljer de olika funktionerna åt, och Jacobianen, J , innehåller derivatan av varje funktion i f med avseende på konstanterna a och b (HMK-Ge:S 1992, Eriksson 2002):

$$f = \begin{bmatrix} f_1 = a + 1^{-b} - 1.96 \\ f_2 = a + 2^{-b} - 1.73 \\ f_3 = a + 3^{-b} - 1.61 \\ \vdots \\ f_\infty = a + \infty^{-b} - 1.00 \end{bmatrix}_{\infty \times 1} \quad (B.2)$$

$$J = \begin{bmatrix} \partial f_1 / \partial a & \partial f_1 / \partial b \\ \partial f_2 / \partial a & \partial f_2 / \partial b \\ \partial f_3 / \partial a & \partial f_3 / \partial b \\ \vdots & \vdots \\ \partial f_\infty / \partial a & \partial f_\infty / \partial b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\log(1) \cdot 1^{-b} \\ 1 & -\log(2) \cdot 2^{-b} \\ 1 & -\log(3) \cdot 3^{-b} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & -\log(\infty) \cdot \infty^{-b} \end{bmatrix}_{\infty \times 2}$$

Startvärden för a och b gissas fram genom att till exempel rita funktionen f och följande överbestämda, nu linjära, ekvationssystem kan lösas (Eriksson 2002):

$$J \cdot \delta c = -f \rightarrow J \cdot \delta c \approx -f \quad (B.3)$$

där

δc = en 2x1 vektor innehållandes korrektion för a och b som ska lösas med minsta kvadratmetoden

Minsta kvadratmetoden tillämpas för att lösa ekvationen och sedan uppdateras konstanterna a och b med lösningen på korrektionerna δc (Eriksson 2002):

$$\begin{aligned} J^T J \delta c &= -J^T f \rightarrow \\ \delta c &= -(J^T J)^{-1} J^T f \\ c &= c + \delta c \end{aligned} \quad (B.4)$$

Ekvation B.2, B.3 och B.4 ovan itereras tills ett minimum för felkvadratsumman (summan av residualerna i kvadrat) uppnås och en lösning erhålls för konstanterna. Följande lösning för ekvation B.1 och konstanterna a och b beräknades till (HMK-Ge:S 1992):

$$f = 0.96 + \delta^{-0.4} \quad (B.5)$$

Ekvationen ovan ger ett approximationsfel som är mindre än en siffra i andra decimalen. Ekvationen B.5 och värden för konstanterna a och b verifieras genom följande Matlab-program:

Matlab-kod:

```
%%GAUSS-NEWTONS metod för att hitta konstanter till en icke
%%linjär funktion som anpassats efter F-fördelning
format long;
m=[1 2 3 4 5 7 10 15 20 30 50 70 100 200 500]'; %%antal
                                %%överbestämningar
sigma=[1.96 1.73 1.61 1.54 1.49 1.42 1.35 1.29 1.25 1.21 1.16
1.14 1.11 1.08 1.05]';
c=[1 1]'; %%startvärden för a och b
h=1; %%korrektion av a och b
iter=1;
while (norm(h)>1e-10 && iter<10);
    f=c(1)+m.^(-c(2))-sigma;
    J=[ones(size(m)), -log(m).*m.^(-c(2))];
    h=inv(J'*J)*J'*f;
    disp('      a                b                ca
cb');
    disp([c(1) c(2) h(1) h(2)]);
    c=c-h;
    iter=iter+1;
end;
a=c(1), b=c(2)
```

Utskrift:

a	b	ca	cb
1.000000000000000	1.000000000000000	-0.06181868873907	0.67860170422122
a	b	ca	cb
1.06181868873907	0.32139829577878	0.09314016268836	-0.08071389730443
a	b	ca	cb
0.96867852605071	0.40211219308320	0.00099175029576	-0.01039403755054
a	b	ca	cb
0.96768677575494	0.41250623063374	0.00047745432662	0.00052222963021
a	b	ca	cb
0.96720932142832	0.41198400100353	-0.00002250300778	-0.00003260541240
a	b	ca	cb
0.96723182443611	0.41201660641593	0.00000141047386	0.00000201733047
a	b	ca	cb
0.96723041396225	0.41201458908546	-0.00000008724638	-0.00000012488564
a	b	ca	cb
0.96723050120863	0.41201471397111	0.00000000540119	0.00000000773095
a	b	ca	cb
0.96723049580744	0.41201470624016	-0.00000000033436	-0.00000000047858

a =

0.96723049614180

b =

0.41201470671874

Bilaga 2 - Bilder på område 1-4

Område 1 Teknikparken (360° runt)



Område 2 Teknikparken parkering (360° runt)



Område 3 Bomhus bostadsområde



Område 4 Stigslund bostadsområde





Rapporter i geodesi och geografiska informationssystem från Lantmäteriet

- 2005:8 Eriksson Merja & Hedlund Gunilla: Satellitpositionering med GPS och GPS/GLONASS.
- 2006:2 Norin Dan, Engfeldt Andreas, Johansson Daniel, Lilje Christina: Kortmanual för mätning med SWEPOS Nätverks-RTK-tjänst.
- 2006:3 Klang Dan & Burman Helén: En ny svensk höjdmodell laserskanning, Testprojekt Falun.
- 2006:4 Klang Dan: KRIS-GIS® projekt i Eskilstuna. Kvalitet i höjdmodeller.
- 2006:5 von Malmborg Helena: Jämförelse av Epos och nätverks-DGPS.
- 2006:8 Wennström Hans-Fredrik (ed.): Struve Geodetic Arc 2006 International Conference – the Struve arc and extension in space and time.
- 2006:9 Shah Assad: Systematiska effekter inom den tredje riksavvägningen.
- 2007:1 Johansson Fredrik & Wallerström Mattias: En nätverks-RTK-jämförelse mellan GPS och GPS/GLONASS.
- 2007:4 Ågren Jonas & Svensson Runar: Postglacial land uplift model and system definition for the new Swedish height system RH 2000.
- 2007:8 Halvardsson Daniel & Johansson Joakim: Jämförelse av distributionskanaler för projektanpassad nätverks-RTK.
- 2007:10 Lidberg Martin & Lilje Mikael: Evaluation of monument stability in the SWEPOS GNSS network using terrestrial geodetic methods - up to 2003.
- 2007:11 Lilje Christina, Engfeldt Andreas, Jivall Lotti: Introduktion till GNSS.
- 2007:12 Ivarsson Jesper: Test and evaluation of SWEPOS Automated Processing Service.
- 2007:14 Lilje Mikael, Eriksson Per-Ola, Olsson Per-Anders, Svensson Runar, Ågren Jonas: RH 2000 och riksavvägningen.
- 2008:4 Johansson S Daniel & Persson Sören: Kommunikationsalternativ för nätverks-RTK – virtuell referensstation kontra nätverksmeddelande.
- 2009:1 Ågren Jonas: Beskrivning av de nationella geoidmodellerna SWEN08_RH2000 och SWEN08_RH70.

L A N T M Ä T E R I E T



Vaktmästeriet 801 82 GÄVLE Tfn 026 - 65 29 15 Fax 026 - 68 75 94
Internet: www.lantmateriet.se